SME602 - Cálculo Numérico - - Prof. Murilo F. Tomé

Solução Numérica de Sistema Lineares

NORMAS DE VETORES E MATRIZES

1. Dado o vetor $\mathrm{v} = (-3, 1, 8, 2)^T$, calcule $\|\mathrm{v}\|_1$, $\|\mathrm{v}\|_2$ e $\|\mathrm{v}\|_\infty$.

2. Dada a matriz:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $\|\mathbf{A}\|_1$;

   (b) Calcule $\|\mathbf{A}\|_\infty$;

   (c) Calcule $\|\mathbf{A}\|_F$.

MÉTODOS DIRETOS

1. Resolver o sistema linear abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array} \right.$$

2. Considere o sistema linear abaixo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{pmatrix}$$

   (a) Resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss;

   (b) Resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

3. Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Eliminação de Gauss:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

4. Considere o sistema linear:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -4x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 11 \end{array} \right.$$

   (a) Resolva-o usando o método de Eliminação de Gauss;

   (b) Calcule o determinante de $\mathbf{A}$ usando o item anterior;

   (c) Determine a decomposição LU da matriz $\mathbf{A}$ usando a Eliminação de Gauss .

5. Através do método de eliminação de Gauss, verifique se o sistema linear abaixo tem ou não solução:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

6. Usando o método de eliminação de Gauss, verificar que o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

   (a) Possui uma única solução quando $\alpha = 0$;
   (b) Infinitas soluções quando $\alpha = 1$;
   (c) Não tem soluções quando $\alpha = -1$.

7. Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   Sabendo-se que A^{-1} tem a forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & c_{12} & 1/2 \\ 1/12 & c_{22} & 1/4 \\ 1/2 & c_{32} & -1/2 \end{bmatrix},$$

   calcule a 2ª coluna de A^{-1} pelo método de eliminação de Gauss.

8. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

   (a) Resolva-o usando decomposição LU;
   (b) Calcule o determinante de **A** usando a decomposição.

9. Seja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix}$$

   (a) Verificar se **A** satisfaz as condições da decomposição LU;
   (b) Decompor **A** em LU;
   (c) Calcule o determinante de **A** usando a decomposição LU;

(d) Resolver o sistema linear $\mathbf{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$, onde $\mathrm{b} = (21, 54, -63)^T$, usando a decomposição LU.

10. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \times & \times & 3 & \times \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \times & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

obteve-se as matrizes:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & \times \\ 2 & \times & \times & \times \\ 3 & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 1 & \times \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & -1 & \times & 5 \\ \times & 1 & \times & -2 \\ \times & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \times & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Preencher os espaços "$\times$" com valores adequados.

11. Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição LU:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 5 \end{cases}$$

12. Usando decomposição LU, inverter a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considere o seguinte conjunto "esparso"de equações:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mostre que usando o método de Eliminação de Gauss o sistema triangular resultante permanece esparso. Um sistema como este é chamado TRIDIAGONAL. Tais sistemas aparecem frequentemente na solução de equações diferenciais.

14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Obtenha a factorização desta matriz pelo método de Doolittle e calcule $DetA$;

MÉTODOS ITERATIVOS

ERRO RELATIVO NA ITERAÇÃO $\mathbf{x}^{(k+1)}$: $\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)})\|}$

ESTIMATIVA DO ERRO NA ITERAÇÃO $\mathbf{x}^{(k+1)}$:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|}\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\|$$

1. Supomos que o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & \alpha x_2 & & & = & c_1 \\ -\alpha x_1 & + & x_2 & - & \alpha x_3 & = & c_2 \\ & - & \alpha x_2 & + & x_3 & = & c_3 \end{array}\right.$$

seja resolvido iterativamente pelas fórmulas:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha(x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + c_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha x_2^{(k)} + c_3 \end{array}\right.$$

Para que valores de α a convergência do método definido acima é garantida? Justifique.

2. Um processo iterativo para resolver sistemas de equações do tipo $A\mathbf{x}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$ é assim definido:

- somar $I\mathbf{x}$ a ambos os membros, obtendo $(I+A)\mathbf{x}-\mathbf{b}=\mathbf{x}$
- realizar iterações a partir de $x^{(0)}$ fazendo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I+A)\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \tag{1}$$

a) Dê uma condição suficiente que assegure a convergência deste processo iterativo.

b) Mostre que o método iterativo definido por (1) aplicado ao sistema abaixo converge. Tome $\mathbf{x}^0=\mathbf{0}$ e calcule iterações até que $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{k+1}\|_\infty < 10^{-4}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -1.1x_1 & + & 0.1x_2 & = & 1 \\ 0.3x_1 & - & 0.3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Considere cada um dos seguintes sistemas de 3 equações:

$$(I)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 18 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 10x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 27 \end{array}\right. \quad ; \quad (II)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 12 \end{array}\right.$$

a) Sem rearranjar as equações, tente achar as soluções iterativamente, usando os métodos de Jacobi, começando com $x^{(0)}=(1.01, 2.01, 3.01)^t$.

b) Rearranje as equações de tal modo que satisfaçam os critérios de convergência e repita o que foi feito em 21.1).

c) Verifique suas soluções nas equações originais.

4. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 8x & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 1, \end{cases}$$

determine:

a) A matriz C_J e o vetor $\mathbf{g}_\mathrm{J}$ para o Método de Jacobi;

b) A matriz C_{GS} e o vetor $\mathbf{g}_{\mathrm{GS}}$ para o Método de Gauss-Seidel.

5. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases}$$

a) Verifique o critério das linhas.

b) Resolva o sistema linear utilizando o Método de Jacobi com aproximação inicial $\mathrm{x}^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^T$ e com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

6. Usando o Método de Jacobi, obter solução do sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & = & 11 \end{cases}$$

com três casas decimais correta.

7. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 30 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Jacobi;

b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item **(a)**, obtendo o resultado com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

8. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{cases}$$

a) Verifique o critério das linhas.

b) Verifique o critério das colunas.

c) Calcule $\rho(C_{\mathrm{GS}})$ e verifique se $\rho(C_{\mathrm{GS}}) < 1$.

c) Se caso algum dos critérios **(a)**, **(b)** ou **(c)** for satisfeito, resolva o sistema usando o Método de Gauss-Seidel com $\mathrm{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

9. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ -x & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & -1 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Gauss-Seidel, usando o critério de Sassenfeld.

b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item **(a)** com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

EXERCICIOS ADICIONAIS

1. [**1.0**] Considere o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{Sabendo-se que } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & c_{12} & 1/2 \\ 1/12 & c_{22} & 1/4 \\ 1/2 & c_{32} & -1/2 \end{bmatrix},$$

calcule a 2ª coluna de A^{-1} pelo método de eliminação de Gauss.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x & + & y & & & = & -1 \\ x & - & 3y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3\,z & = & 0 \end{cases}, \tag{2}$$

i) [**1.0**] Prove que o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge para a solução do mesmo independente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

ii) [**1.0**] Tome $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ e mostre que as iteradas satisfazem a desigualdade: $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)}$

iii) [**1.5**]Mostre que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema acima converge e calcule $\mathbf{x}^{(2)}$. Forneça uma estimativa para erro cometido na iterada $\mathbf{x}^{(2)}$.