SME602 - Cálculo Numérico - 1a-PROVA - 09/10/2018

1. Considere a equação: $x - \frac{1}{2}\sin(1+x) = 0.$ (1)

a qual tem uma raiz $z \in [0,\ 1]$. Pretende-se calcular essa raiz pelo método do ponto fixo com função iteradora da forma: $g(x) = x - \frac{1}{2}\big(x - \frac{1}{2}\sin(1+x)\big) = \frac{1}{2}\big(x + \frac{1}{2}\sin(1+x)\big)$.

a) **[0.5]** Verifique que a raiz z da Eq. (1) é ponto fixo de g.

RESOLUÇÃO:

De fato, seja z a raiz de Eq. (1). Então, temos:

$$z - \frac{1}{2}\sin(1+z) = 0 \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2}\big[z - \frac{1}{2}\sin(1+z)\big] = 0$$
$$\longrightarrow \quad z = z - \frac{1}{2}\big[z - \frac{1}{2}\sin(1+z)\big]$$

o que mostra que z é ponto fixo de $g(x) = x - \frac{1}{2}\big(x - \frac{1}{2}\sin(1+x)\big)$.

b) **[1.5]** Mostre que o método do ponto fixo associado a $g(x)$ converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0,\ 1]$.

RESOLUÇÃO: Devemos mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições :

(a) $g\big(I\big) \subset I$, em $I = [0,\ 1]$.

(b) $\max\big\{|g'(x)|\big\} \leq L < 1$

Temos que $g'(x) = 0.5 * \big(1 + \frac{1}{2}\cos(1+x)\big) > 0$ $\big[$ desde que $|\cos(1+x)| \leq 1$ $\big]$ e portanto, $g(x)$ é monótona crescente em I e tem-se:

$g(0) = \frac{1}{4}\sin(1) = 0.2103677462019 =\leq g(x) \leq \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{2}\sin(2)\big) = 0.7273243567$, o que mostra que condição (a) está satisfeita (ver gráfico de $g(x)$).

Por outro lado, como $|\cos(1+x)| \leq 1$ vemos que $\max\big\{|g'(x)|\big\} \leq 3/4 = L < 1$ e assim condição (b) também está satisfeita.

Logo, pelo teorema da *Iteração do Ponto Fixo*, a sequência definida por

$x_{n+1} = g(x_n) \longrightarrow z \in [0,\ 1],\ \forall\ x_0 \in [0,\ 1]$.

c) **[0.5]** Calcule x_5 e uma aprox. para o erro $|z - x_5|$.

SOLUÇÃO: Tomando, $x_0 = 0$, obtemos as iterações:

$x_1 = g(x_1) = 0.5 * \big(x_0 + 0.5 * \sin(1 + x_0)\big) = 0.2103677462019$

$x_2 = g(x_1) = 0.5 * \big(x_1 + 0.5 * \sin(1 + x_1)\big) = 0.339120313058338$

$x_3 = g(x_2) = 0.41288089007875$

$x_4 = g(x_3) = 0.453329756806651$

$x_5 = g(x_4) = 0.4749420613968$

$x_6 = 0.486323404780,$ $\quad x_7 = 0.49227027333,$ $\quad x_8 = 0.4953647400351$

d) **[0.5]** Determine a ordem de convergência do método e o fator assintótico de convergencia K_∞

SOLUÇÃO: Ordem de convergência: $g'(x_5) = 0.5*\big(1+0.5\cos(1+x_5)\big) \approx 0.52392 \neq 0 \longrightarrow p = 1$. Fator assintótico de convergência $k_\infty = |g'(x_5)| \approx 0.52392$.

2. [**1.5**] Seja a matriz A abaixo. Utilize o método LU e calcule a 2a. coluna da matriz A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 & 1.5 & 0.0 \\ 1.0 & 3.5 & 1.5 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 3.5 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO:

A segunda coluna de A^{-1}, denotada por $\mathbf{X} = [X_{12} \;\; X_{22} \;\; X_{32} \;\; X_{42}]$, é obtida pela solução do sistema linear $A\mathbf{X} = \mathbf{e_2}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 & 1.5 & 0.0 \\ 1.0 & 3.5 & 1.5 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 3.5 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \\ X_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as fórmulas para o cálculo das matrizes L e U, obtém-se

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.28571 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.28571 & 0.18605 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.34818 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 & 1.5 & 0.0 \\ 0.0 & 3.07143 & 1.07143 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.87209 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.97773 \end{bmatrix}.$$

Tendo obtido as matrizes L e U, a solução $\mathbf{X}$ é obtida resolvendo os sistemas lineares: $L\mathbf{Y} = [0.0 \;\; 1.0 \;\; 0.0 \;\; 0.0]^T$ e $U\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, obtendo,

$\mathbf{Y} = [\mathbf{0.0 \;\; 1.0 \;\; 0.18605 \;\; 0.06478}]^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{X} = [\mathbf{-0.11829 \;\; 0.35214 \;\; -0.07614 \;\; 0.02175}]^{\mathbf{T}}$

3. [**1.0**] Considere o mét. iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ onde a matriz de iteração é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.65 \\ -0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Esse método é convergente? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO: Basta mostrar que $\|C\| < 1$.

Como $\|C\|_1 = \max_{1 \le j \le 3} \sum_{i=1}^{3} |c_{ij}| = \max\{0.7, 0.9, 0.9\} = 0.9 < 1.0$, pelo Critério Geral da Convergência, pode-se concluir que o método iterativo é convergente.

4. O sistema linear abaixo, tem solução $\mathbf{x} = [1 \;\; 2 \;\; -1]^T$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

(a) [**1.0**] Mostre que $\rho(T_J) > 1$
(b) [**1.0**] Mostre que $\rho(T_{GS}) = 1/2$
(c) [**0.5**] O mét. de Jacobi aplicado a esse sist. linear converge? O mét. de Gauss-Seidel converge? Justifique a sua resposta.

(a) [**1.0**] Mostre que $\rho(T_J) > 1$.

SOLUÇÃO:

Seja $p(\lambda)$ o polinômio característico da matriz de iteração T_J que é dada da seguinte forma

$$T_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, calculando o polinômio característico $p(\lambda)$, obtêm-se

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0.5 & -0.5 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0.5 & 0.5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(\lambda^2 + 1.25) = 0$$

de onde conclui-se que o maior autovalor de T_J em módulo é $|\lambda| = 1.11803 > 1.0$.

Portando, $\rho(T_J) > 1$.

(b) **[1.0]** Mostre que $\rho(T_{GS}) = 1/2$.

SOLUÇÃO:

Seja, agora, $p(\lambda)$ o polinômio característico da matriz de iteração T_{GS} que é dada da seguinte forma

$$T_{GS} = -(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico $p(\lambda)$, obtêm-se

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5-\lambda & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(0.5+\lambda)^2 = 0$$

de onde conclui-se que o maior autovalor de T_{GS} em módulo é $|\lambda| = 0.5$.

Portando, $\rho(T_{GS}) = 1/2$.

(c) **[0.5]** O mét. de Jacobi aplicado a esse sist. linear converge? O mét. de Gauss-Seidel converge? Justifique a sua resposta.

SOLUÇÃO:

Como $\rho(T_J) > 1$ (como mostrado no item a)), pode-se concluir que o $max|\lambda_i| > 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz T_J, logo, o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear não converge.

Do item b), tem-se que $\rho(T_{GS}) = 1/2$, logo $max|\lambda_i| < 1$, com λ_i sendo os autovalores da matriz T_{GS}. Portanto, o método de Gauss-Seidel aplicado a esse sistema linear converge.

5. Pretende-se aplicar o mét. de Newton para aprox. a solução do sist. de eqs. não-lineares

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 6 \\ x_1x_2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(a) **[1.0]** Utilize $\mathbf{x^{(0)}} = [1\ 4\ 0]^T$ como aprox. inicial, e obtenha o sistema linear para calcular a primeira iteração $\mathbf{x}^{(1)}$.

SOLUÇÃO: Pelo método de Newton para sistemas não lineares sabemos que,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

onde, $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})$ é a matriz Jacobiana da função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ aplicada no vetor $\mathbf{x}^{(0)}$. Calculando $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})$ temos,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 3.0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6.0 \\ x_1x_2x_3 - 2.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 2x_2 + x_3 & 2x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Observe que $\left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\right]\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ é um sistema linear que precisa ser resolvido para determinar $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -11 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) **[1.0]** Resolva o sistema obtido utilizando o método de Elim. de Gauss e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$.

SOLUÇÃO: Aplicando o método de eleiminação de Gauss ao sistema $A\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$,

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$m_{21} = A(2,1)/A(1,1) = 0.25000$
$A(2,:) = A(1,:) * (-m_{21}) + A(2,:)$
$b(2) = b(1) * (-m_{21}) + b(2)$
Logo,

$$\begin{bmatrix} 8.000000 & 2.000000 & 5.000000 \\ 0.000000 & 7.500000 & -1.250000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 4.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11.000000 \\ -8.250000 \\ 2.000000 \end{bmatrix}$$

E portanto temos,

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.433333 \\ -1.016666 \\ 0.500000 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{x}^{(1)}$ pode ser determinado da seguinte maneira,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.433333 \\ -1.016666 \\ 0.500000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.433333 \\ 2.983333 \\ 0.500000 \end{bmatrix}.$$

6. [**1.0**] Considere a matriz abaixo e $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando o método das potências, calcule as 3 primeiras aproximações $\mu^{(m)}$ para o autovalor dominante λ_1 de $\mathbf{A}$.

SOLUÇÃO: O maior autovalor de A pode ser obtido pelo método das potências da seguinte maneira,

$***k = 0 \Rightarrow X^{(0)} = [1.0, \quad 1.0, \quad 1.0, \quad 1.0]^T \Rightarrow x_{p0}^{(0)} = ||X^{(0)}||_\infty = 1.0$

$$Y^{(1)} = AX^{(0)} = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.000000 \\ 1.500000 \\ 1.500000 \\ 5.000000 \end{bmatrix}$$

como $||Y^{(1)}||_\infty = 7.0000 \Rightarrow p_1 = 1$, logo, $\mu^{(1)} = y_{p_1}^{(1)} = Y_1^{(1)} = 7.0000$ e $X^{(1)} = Y^{(1)}/y_{p_1}^{(1)} = [1.0000000 \quad 0.214286 \quad 0.214286 \quad 0.714286]^T$.

$***k = 1 \Rightarrow X^{(1)} = [1.0000000 \quad 0.214286 \quad 0.214286 \quad 0.714286]^T \Rightarrow x_{p_1}^{(1)} = ||X^{(1)}||_\infty = 1.0 \Rightarrow p_1 = 1$

$$Y^{(2)} = AX^{(1)} = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 0.214286 \\ 0.214286 \\ 0.714286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.464286 \\ 0.571428 \\ 0.964286 \\ 2.571428 \end{bmatrix}$$

como $||Y^{(2)}||_\infty = 6.464286 \Rightarrow p_2 = 1$, logo, $\mu^{(2)} = y_{p_2}^{(2)} = Y_1^{(2)} = 6.464286$ e $X^{(2)} = Y^{(2)}/y_{p_2}^{(2)} = [1.000000 \quad 0.088398 \quad 0.149171 \quad 0.397790]^T$.

$***k = 2 \Rightarrow X^{(2)} = [1.000000 \quad 0.088398 \quad 0.149171 \quad 0.397790]^T \Rightarrow x_{p_2}^{(2)} = ||X^{(2)}||_\infty = 1.0 \Rightarrow p_2 = 1$

$$Y^{(3)} = AX^{(2)} = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 0.088398 \\ 0.149171 \\ 0.397790 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.273481 \\ 0.287293 \\ 0.743094 \\ 1.430939 \end{bmatrix}$$

como $||Y^{(3)}||_\infty = 6.273481 \Rightarrow p_3 = 1$, logo, $\mu^{(3)} = y_{p_3}^{(3)} = Y_1^{(3)} = 6.27348$ e $X^{(3)} = Y^{(3)}/y_{p_3}^{(3)} = [1.000000 \quad 0.045795 \quad 0.118450 \quad 0.228093]^T$.

Note que $\mu^{(3)} = 6.273481$ é uma aproximação para o maior autovalor da matriz A (maior autovalor exato de A é 6.056975004142108).