**Cálculo Numérico** **$2^o$ sem/2018**

**EXERCICIOS EXTRAIDOS DE PROVAS ANTERIORES**

**EXERCICIOS RESOLVIDOS - INT-POLIN - MMQ - INT-NUMERICA - EDO**

**1.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f$:

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1.50 | 0.50 | 0.8333 | 0.60 |

**a)** Utilizando interpolação de 2a. ordem, forneça uma aproximação para $f(1.2)$.

**SOLUÇÃO:** Sejam $x_0 = 0, x_1 = 1.0, x_2 = 2$. O polinomio interpolador $P_2(x)$ é dado por:

$$f(1.2) \approx P_2(1.2) = l_0(1.2) * f(0) + l_1(1.2) * f(x_1) + l_2(1.2) * f(x_2)$$
$$P_2(x) = l_0(x) * f(x_0) + l_0(x) * f(x_0) + 0(x) * f(x_0) =$$
$$l_0(x) = \frac{(x-1)*(x-2)}{(0-1)*(0-2)} = 0.5*(x-1)*(x-2)$$
$$\Longrightarrow \ l_0(1.2) = 0.5(1.2-1)*1.2-2) = -0.0800$$
$$l_1(x) = 0.5*(x-0)*(x-2) \ \longrightarrow \ l_1(1.2) = -(1.2)*(-0.8) = 0.9600$$
$$l_2(x) = 0.5*(x-0)*(x-1) \ \longrightarrow \ l_2(1.2) = 0.5*(1.2)*(0.2) = 0.1200$$
$$f(1.2) \approx P_2(1.2) = -0.0800*(0.5) + 0.96*(0.8333) + 0.12*(0.6) = 0.831968$$

**b)** Determine os parâmetros $\alpha_0$ e $\alpha_1$ de modo que a função: $g(x) = \dfrac{\alpha_0}{x+4} + \dfrac{\alpha_1 \, x}{1+x^2}$

se ajuste aos valores tabelados segundo o critério dos mínimos quadrados (MMQ).

**SOLUÇÃO:** temos que: $g(x) = \alpha_0 * g_0(x) + \alpha_1 * g_1(x)$, onde $g_0(x) = \dfrac{1}{x+4}$, $g_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
Pelo MMQ, $\alpha_0$ e $\alpha_1$ são obtidos pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (g_0,g_0) & (g_1,g_0) \\ (g_0,g_1) & (g_1,g_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,g_0) \\ (f,g_1) \end{bmatrix}, \quad g_0 = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.2500 \\ 0.2000 \\ 0.1667 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 0.5000 \\ 0.8333 \\ 0.6000 \end{bmatrix}$$

Calculando os produtos escalares obtemos:

| | |
|---|---|
| $(g_0,g_0) = 0.2414$, $(g_1,g_0) = 0.0$, $(g_1,g_1) = 0.6600$ $(f,g_0) = 0.8917$ $(f,g_1) = -0.0933$ | $\begin{bmatrix} 0.2414 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8917 \\ -0.0933 \end{bmatrix}$, $\alpha_0 = 3.6936$, $\alpha_1 = -0.1409$ |

**2.** Sabe-se que a função dada na tabela abaixo é do tipo $f(x) = \dfrac{1+0.5x^2}{\ln(a+bx^2)}$. Determine os valores de $a$ e $b$ pelo método dos mínimos quadrados.

| $x_i$ | 1.000 | 1.300 | 1.5000 | 1.700 | 2.000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 8.2272 | 3.5441 | 2.9111 | 2.6420 | 2.5127 |

**SOLUÇÃO:** Queremos aproximar $f(x)$ por $g(x) = \dfrac{1+0.5x^2}{\ln(a+bx^2)}$ que envolve os parâmetros $a$ e $b$ de forma não-linear. Para aplicar o MMQ, precisamos aplicar uma transformação de forma a obter uma função $G(x)$ que envolva os parâmetros linearmente. Assim, procedemos como segue:

$$f(x) \approx \frac{1+0.5x^2}{\ln(a+bx^2)} \longrightarrow \frac{f(x)}{1+0.5x^2} \approx \frac{1}{\ln(a+bx^2)}$$

$$\longrightarrow \left[\frac{f(x)}{1+0.5x^2}\right]^{-1} \approx \ln(a+bx^2) \longrightarrow e^{\left[\frac{1+0.5x^2}{f(x)}\right]} \approx a+bx^2\,.$$

Logo, os parâmetros $a$ e $b$ são calculados pelo MMQ de modo que a função

$G(x) = a * g_0(x) + b * g_1(x),\ g_0(x) = 1, g_1(x) = x^2$ aproxime a função $F(x) = e^{\left(\frac{1+0.5x^2}{f(x)}\right)}$ pelo MQ. Os valores de $a$ e $b$ são obtidos pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (g_0,g_0) & (g_1,g_0) \\ (g_0,g_1) & (g_1,g_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,g_0) \\ (f,g_1) \end{bmatrix}, \quad g_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.69 \\ 2.25 \\ 2.89 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 8.2272 \\ 3.5441 \\ 2.9111 \\ 2.6420 \\ 2.5127 \end{bmatrix}$$

Calculando os produtos escalares obtemos:

| | |
|---|---|
| $(g_0,g_0) = 5,\quad (g_1,g_0) = 11.8300,$<br>$(g_1,g_1) = 33.2707\quad (f,g_0) = 19.8370$<br>$(f,g_1) = 38.4528$ | $\begin{bmatrix} 5 & 11.8300 \\ 11.8300 & 33.2707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.8370 \\ 19.8370 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a = 7.7673 \\ b = -1.6061 \end{matrix}$ |

**3.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f$

| $x_i$ | $-2.0$ | $-0.5$ | $0.70$ | $1.2$ | $1.5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $28.0$ | $6.625$ | $-2.375$ | $-4.0$ | $-4.375$ |

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau $\leq 2$, utilize a formula do trapézio e calcule exatamente

$$I(f) = \int_{-2}^{1.5} f(x)dx. \qquad \text{Justifique a sua resposta.}$$

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau $\leq 2$, utilize a formula do trapézio e calcule exatamente

$$I(f) = \int_{-2}^{1.5} f(x)dx. \qquad \text{Justifique a sua resposta.}$$

**SOLUÇÃO:** Utilizando a fórmula dos Trapézios, podemos obter o valor da integral de duas maneiras considerando os seus respectivos erros.

- Primeira: usando $x_0 = -2.0$ e $x_4 = 1.5$, com $h = 3.5$,

$$I(f) = \int_{-2}^{1.5} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_4)\right] - \frac{h^3}{12}f''(\eta) \quad (I)$$

- Segunda: usando os pontos, $x_0 = -2.0$, $x_1 = -0.5$ e $x_4 = 1.5$ ($h_1 = x_1 - x_0 = 1.5$ e $h_1 = x_4 - x_1 = 2.0$). Note que, o espaçamento entre os pontos não são iguais. Então, vamos calcular a integral como soma de duas integrais da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
I(f) = \int_{-2}^{1.5} f(x)dx &= \int_{-2}^{-0.5} f(x)dx + \int_{-0.5}^{1.5} f(x)dx \\
&= \left[\frac{h_1}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h_1^3}{12}f''(\eta)\right] + \left[\frac{h_2}{2}\left[f(x_1) + f(x_4)\right] - \frac{h_2^3}{12}f''(\eta)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[h_1 * f(x_0) + (h_1 + h_2) * f(x_1) + h_2 * f(x_4)\right] - \frac{(h_1^3 + h_2^3)}{12}f''(\eta) \quad (II)
\end{aligned}$$

Note que é necessário obter a derivada de segunda ordem de $f(x) = P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, ou seja, $f''(x) = 2A$, $\forall\, x \in [-2 \quad 1.5]$.

Calculando $I(f)$ por $(I)$,

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{3.5}{2}\left[28.0 - 4.375\right] - \frac{3.5^3}{12} * 2A = 1.7500 * 23.6250 - \frac{42.8750}{6}A \\
&= 41.343750 - 7.145833333 * A, \quad (III)
\end{aligned}$$

e por $(II)$,

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{1}{2}\left[15 * 28.0 + (1.5 + 2.0) * 6.625 - 2.0 * 4.375\right] - \frac{(1.5^3 + 2.0^3)}{12} * 2A \\
&= \frac{1}{2}\left[42.00000 + 23.18750 - 8.75000\right] - \frac{11.37500}{6} * A \\
&= \frac{1}{2}\left[56.43750\right] - 1.895833333 * A = 28.218750 - 1.895833333 * A. \quad (IV)
\end{aligned}$$

Resolvendo $(III)$ e $(IV)$,

$$41.343750 - 7.145833333 * A = 28.218750 - 1.895833333 * A \Rightarrow -5.25000 * A = -13.12500$$

$\Rightarrow$

$A = 2.50000$.

Agora obtendo $I(f)$...

$I(f) = 41.343750 - 7.145833333 * 2.50000 = 23.479166666$.

e também,

$I(f) = 28.218750 - 1.895833333 * 2.50000 = 23.479166666$.

Observe que o termo do erro presente na aproximação pela fórmula dos Trapézios é dado em função do coeficiente $A$ do polinômio de segundo grau. Logo, utilizando as duas maneiras de aproximar $I(f)$ foi possível obter o valor de $A$ e assim determinar o erro cometido por ambas as aproximações. Com isso, o valor exato da integral pode ser obtido.

**4.** Seja $I(f) = \int_0^1 \cos(x)dx$. Calcule $N$ de modo que a fórmula do trapézio composta $(I_T^N(f))$ forneça uma aproximação com um erro $|E_T^N(f)| < 10^{-3}$.

Calcule $I_T^N(f)$ com o $N$ obtido e o respectivo erro.

**SOLUÇÃO:**

$$I(f) = \int_0^1 \cos(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_N) + \sum_{j=1}^{N-1} 2f(x_j)\right] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\xi) \text{ onde } \xi \in [0,\ 1].$$

Temos que $f''(x) = -\cos(x)$. O erro para a fórmula do trapézio composta pode ser então calculado considerando,

$$|E_T^N(f)| \leq \frac{(b-a)}{12}h^2 \max|-\cos(\xi)|, \quad \xi \in [0,\ 1]$$

Note que, $|-\cos(\xi)| \leq 1$, $\forall\ \xi \in [0,\ 1]$ e $h = \frac{(b-a)}{N}$. Logo,

$$|E_T^N(f)| \leq \frac{1.0}{12}\left[\frac{1.0}{N}\right]^2 * 1.0 < 10^{-3} \Rightarrow \frac{1.0}{12} * \frac{1.0}{N^2} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{1.0}{12} * \frac{1.0}{10^{-3}} < N^2 \Rightarrow$$

$$N^2 > \frac{1.0}{12} * 10^3 \Rightarrow N > \sqrt{\frac{10.0}{12} * 10^2} \Rightarrow N > \sqrt{\frac{5.0}{6.0}} * 10.0 \Rightarrow N > 0,912870929 * 10.0 \Rightarrow$$

$N > 9.12870929$ ou seja $N \geq 10$.

Calcule $I_T^N(f)$ com o $N$ obtido e o respectivo erro. **SOLUÇÃO:**

$$I(f) = \int_0^1 \cos(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_{10}) + \sum_{j=1}^{9} 2f(x_j)\right]$$

Temos, $h = \frac{(1-0)}{10} = 0.1$, então,

| $x_i$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1.00000 | 0.995004 | 0.980066 | 0.955336 | 0.921060 | 0.877582 |
| $x_i$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | |
| $f(x_i)$ | 0.825335 | 0.764842 | 0.696706 | 0.621609 | 0.540302 | |

Logo,

$$I(f) \approx \frac{0.1}{2}\Big[1.000000 + 1.990008 + 1.960133 + 1.910672 + 1.842121 + 1.755165$$
$$+ 1.650671 + 1.529684 + 1.393413 + 1.243219 + 0.540302\Big]$$

$$I(f) \approx \frac{0.1}{2} * 16.815392 \Rightarrow I(f) \approx 0.840769642.$$

Estimando o erro... $|E_T^1(f)| \leq \frac{(b-a)}{12}h^2 * 1.0 = \frac{1.0}{12.0} * 0.1^2 * 1.0 = 8.33333333335e-04$.

**5.** Considere a função tabelada:

| $x_j$ | 0.50 | 0.73 | 1.30 | 1.50 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_j)$ | 0.8750 | 1.4780 | 3.5230 | 4.4250 |

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau $\leq 2$, utilize a fórmula do Trapézio e calcule exatamente $I(f) = \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx$. Justifique a sua resposta.

**SOLUCAO: A fórmula do Trapézio é dada por:**

$$I(f) = \int_a^b (f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12} f''\epsilon$$

**Considerando** $[0.5,\ 1.5]$ **e tendo em mente que** $f(x)$ **é polinômio de grau** $\leq 2$**, obtemos as equações:**

$$I(f) = \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx = \frac{1}{2}[0.8750 + 4.4250] - \frac{1}{12} * (2A) \left\{ \textbf{ desde que } \quad f''\epsilon = 2A \right\}$$

$$I(f) = 2.650 - 0.16666666 * A$$

$$I(f) = \int_{0.5}^{1.3} f(x)dx + \int_{1.3}^{1.5} f(x)dx = \frac{0.8}{2}[0.8750 + 3.5230] - \frac{0.8^3}{12} * (2A)$$
$$+ \frac{0.2}{2}[3.5230 + 4.4250] - \frac{0.2^3}{12} * (2A)$$

$$I(f) = 2.650 - 0.16666666 * A$$
$$I(f) = 1.759200000 - 0.0853333 * A + 0.794800 - 0.001333333 * A$$
$$I(f) = 2.55400 - 0.08400 * A$$
$$A = 1.161290, \quad I(f) = 2.45645$$

**6.** Considere a integral: $I(f) = \int_0^\infty e^{-x}(1 + 2x^2 + 3x^5 - 0.5x^6)\, dx$.

**a) SOLUÇÃO: A fórmula Gauss-Laguerre com** $N = 3$ **é dada por:**

$I_Q(f) = A_0 * f(x_0) + A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2)$ **onde** $x_0, x_1, x_2$ **são os zeros do polinômio de Laguerre de grau 3. Da tabela obtemos os valores dos zeros e dos coeficientes** $A_0, A_1, A_2$**, os quais são dados por:**

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_0 = 0.415775, & A_0 = 0.711093 & f(x_0) = 1 + 2x_0^2 + 3x_0^5 - 0.5x_0^6 = 1.38042933670196 \\ x_1 = 2.29428, & A_1 = 0.278518 & f(x_1) = 1 + 2x_1^2 + 3x_1^5 - 0.5x_1^6 = 129.308296260801 \\ x_2 = 6.28995, & A_2 = 0.0103893 & f(x_2) = 1 + 2x_2^2 + 3x_2^5 - 0.5x_2^6 = -1347.21846958064 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I(f) \approx A_0 * f(x_0) + A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2) \\ I(f) \approx 22.99964492 \end{array}}$$

**b)** Qual é o grau de precisão da fórmula utilizada no item a)? O resultado da aproximação obtida no item a) é exato? Justifique a sua resposta.

**SOLUÇÃO: O grau de precisão dessa formula é:** $r = 2 * 2 + 1 = 5$**.**

**O resultado não é exato porque** $f(x)$ **é um polinômio de grau** $N = 6 > r$**.**

**7.** Considere a igualdade: $\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 p_1(x)dx$ onde $p_1(x)$ é um polinômio de grau $\leq 1$.

**a)** Forneça condições suficientes sobre $p_1(x)$ para que essa igualdade seja válida.

**SOLUÇAO:** Conforme o **Teorema de Quadratura de Gauss**, para que essa igualdade seja válida, o polinômio $p_1(x)$ precisa satisfazer os requisitos:

1. $p_1(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ em $x_0$ e $x_1$.
2. Os pontos de interpolação $x_0$ e $x_1$ são os zeros do polinômio ortogonal $\phi_2(x)$ ;
3. $\phi_2(x)$ é calculado segundo o produto escalar: $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

**b)** Considere o produto escalar: $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ e calcule o polinômio ortogonal $\phi_2(x)$ com relação a esse produto escalar (utilize as fórmulas do formulário) e obtenha o polinômio $p_1(x)$ e calcule $I(p_1)$.

**SOLUÇAO:** Utilizando as fórmulas para calcular polinômios ortogonais, obtemos:

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} = x - 0.5 \qquad \left(\text{desde que } \frac{(x,1)}{(1,1)} = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} = \frac{0.5}{1} = 0.5\right)$$

$$\phi_2(x) = x*(x-0.5) - \alpha_1*(x-0.5) - \beta_1*1$$

$$\alpha_1 = \frac{(x\phi_1, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)} = \frac{\int_0^1 x(x-0.5)^2 dx}{\int_0^1 (x-0.5)^2 dx} = \frac{1/24}{1/12} = 0.5$$

$$\beta_1 = \frac{(x\phi_1, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = \frac{\int_0^1 x(x-0.5)*(1)dx}{\int_0^1 (1^2)dx} = \frac{(1/12)}{1} = 1/12.$$

Logo, $\phi_2(x) = x*(x-0.5) - 0.5*(x-0.5) - 1/12 = x^2 - x + 1/6$ :

**RAIZES de** $\phi_2(x) : x_0 = 0.2113248, \quad x_1 = 0.7886751.$

Logo,

$$p_1(x) = \frac{(x-0.7886751)}{(0.2113248-0.7886751)}*(0.2113248)^3 + \frac{(x-0.2113248)}{(0.7886751-0.2113248)}*(0.7886751)^3 \;.$$

$p_1(x) = -1.7320508*(x-0.7886751)*(0.2113248)^3 + 1.7320508*(x-0.2113248)*(0.7886751)^3$

E PORTANTO,

$I(p_1(x)) = \int_0^1 -1.7320508*(x-0.7886751)*(0.2113248)^3 + 1.7320508*(x-0.2113248)*(0.7886751)^3 dx = 1/4.$

**8.** Considere o PVI: $\begin{cases} y' = y - 2x/y, & 0 \le x \le 0.3, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

Faça $h = 0.15$ e calcule $y(0.3)$
pelo mét. de Euler modificado

**SOLUÇÃO: Como** $h = 0.5$ **tem-se:** $x_0 = 0.0, x_1 = 0.15, x_2 = 0.3$.
**O método de Euler modificado fornece as equações:**

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\Big[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \overline{y}_{j+1})\Big] \text{ , onde } \overline{y}_{j+1} = y_j + f(x_j, y_j).$$

**Logo, temos:**

$j = 0$ **- Cálculo de** $y_1$ **-** $x_0 = 0.0, y_0 = 1.0$
*** $f(x_0, y_0) = y_0 - 2x_0/y_0 = 1.0 - 2.0 * (0.0)/(1.0) = 1.0$
*** $\overline{y}_1 = y_0 + 0.15 * f(x_0, y_0) = 1.0 + 0.15 * 1.0 = 1.15$
*** $f(x_1, \overline{y}_1) = \overline{y}_1 - 2 * x_1/\overline{y}_1 = 1.15 - 2 * (0.1)/1.15 = 0.88913043$
*** $y_1 = y_0 + \frac{0.15}{2}\Big[f(x_0, y_0) + f(x_1, \overline{y}_1)\Big] = 1.0 + 0.075 * \Big[1.0 + 0.889130\Big] = 1.14168478$
*********************************************

$j = 1$ **- Cálculo de** $y_2$ **-** $x_1 = 0.15, y_1 = 1.14168478$
*** $f(x_1, y_1) = y_1 - 2x_1/y_1 = 1.14168478 - 2.0 * (0.15)/(1.14168478) = 0.87891522$
*** $\overline{y}_2 = y_1 + 0.15 * f(x_1, y_1) = 1.27352206$
*** $f(x_2, \overline{y}_2) = \overline{y}_2 - 2 * x_2/\overline{y}_2 = 0.8023877101$
*** $y_2 = y_1 + \frac{0.15}{2}\Big[f(x_1, y_1) + f(x_2, \overline{y}_2)\ \Big]$
$= 1.14168478 + 0.075 * \Big[0.878915229 + 0.802387710193\Big] = 1.2677825$
*********************************************