SME602 - Cálculo Numérico
Prof. Murilo F. Tomé **2^o sem/2015**

EXERCICIOS RESOLVIDOS - EQUAÇÕES NÃO-LINEARES - SISTEMAS LINEARES

1. Considere a equação $x + 2ln(x) = 0 \qquad (I)$.
Pretende-se encontrar as raizes desta equação aplicando o método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{C^2 x_n + e^{-\frac{x_n}{2}}}{1 + C^2} \qquad (II)$$

onde C é uma constante real.

a) Mostre que os pontos fixos da função iteradora do método iterativo definido pela Eq. (II) coincidem com os zeros da eq. (I).

SOLUÇÃO: Seja

$$g(x) = \frac{C^2 x + e^{-\frac{x}{2}}}{1 + C^2}$$

e seja $\overline{x} > 0$ um ponto fixo de $g(x)$. Então,

$$\overline{x} = g(\overline{x}) = \frac{C^2\overline{x} + e^{-\frac{\overline{x}}{2}}}{1 + C^2} \Longleftrightarrow (1 + C^2)\overline{x} = C^2\overline{x} + e^{-\frac{\overline{x}}{2}} \Longleftrightarrow \overline{x} = e^{-\frac{\overline{x}}{2}} \Longleftrightarrow ln(\overline{x}) = -\frac{\overline{x}}{2}$$
$$\Longleftrightarrow 2ln(\overline{x}) = -\overline{x} \Longleftrightarrow \overline{x} + 2ln(\overline{x}) = 0. \text{ Portanto, } \overline{x} \text{ é raiz de } \quad f(x) = 0.$$

b) Faça $C = 1.0$ na eq. (II) e mostre que este método iterativo converge para a raiz da equação eq. (I), qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0.5, 0.9]$. Tome $x_0 = 0.6$ e calcule iteradas x_{n+1} até que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$. Calcule uma estimativa do erro cometido na iterada x_{n+1}.

SOLUÇÃO: Para $C = 1$, temos: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + e^{-\frac{x_n}{2}}\right]$. Mostremos que $g(x) = \frac{1}{2}\left[x + e^{-\frac{x}{2}}\right]$ satisfaz as condições do teorema do ponto fixo em $I = [0.5, 0.9]$, ou seja, mostremos que:

i) $g(x) \in C^1[I]$ (esta condição é verificada visto que $g(x)$ é uma soma de 2 funções diferenciaveis)

ii) $g(I) \subset I$

iii) $\displaystyle \frac{max}{x \in I}|g'(x)| = L < 1$

De fato, $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ e $g''(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}$. Como $g''(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} > 0, \forall x \in I \Longrightarrow g'(x)$ é crescente em $I \Longrightarrow g'(0.5) \le g'(x) \le g'(0.9)$. Agora,

$$(*) \begin{cases} g'(0.5) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}e^{-0.25} = 0.3052998, \\ g'(0.9) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}e^{-0.45} = 0.3405930. \\ \text{Portanto, } \dfrac{max}{x \in I}|g'(x)| = 0.3405930 = L < 1. \end{cases}$$

Por $(*)$, vemos que $g'(x) > 0, \forall x \in I \Longrightarrow g(x)$ é crescente em $I \Longrightarrow \quad g(0.5) \leq g(x) \leq g(0.9)$. Calculando $g(0.5)$ e $g(0.9)$ vem:

$$(**) \begin{cases} g(0.5) = \dfrac{1}{2}\left[0.5 + e^{-0.25}\right] = 0.639400 \in I \\ g(0.9) = \dfrac{1}{2}\left[0.9 + e^{-0.45}\right] = 0.768814 \in I \quad \text{ Portanto, } \; g(x) \in I, \forall x \in I. \end{cases}$$

De $(*)$ e $(**)$, vemos que as condições do teorema do ponto fixo estão satisfeitas e $\forall x_0 \in I$, a sucessão gerada por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + e^{-\dfrac{x_n}{2}}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

converge para o único ponto fixo (único zero de $f(x)$) de $g(x)$ em $I = [0.5, 0.9]$. Seja $x_0 = 0.6$. Então,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}(0.6 + e^{-0.30}) = 0.6704091 \\
x_2 &= \frac{1}{2}(0.6704091 + e^{-0.3352046}) = 0.6928004 \\
x_3 &= \frac{1}{2}(0.6928004 + e^{-0.3464002}) = 0.7000149 \\
x_4 &= \frac{1}{2}(0.7000149 + e^{-0.3500075}) = 0.7023489 \\
x_5 &= \frac{1}{2}(0.7023489 + e^{-0.3511745}) = 0.7031049 \\
x_6 &= \frac{1}{2}(0.7031049 + e^{-0.3515525}) = 0.7033499 \\
x_7 &= \frac{1}{2}(0.7033499 + e^{-0.3516750}) = 0.7034293 \\
x_8 &= \frac{1}{2}(0.7034293 + e^{-0.3517147}) = 0.7034551
\end{aligned}$$

Logo, $|x_8 - x_7| = 0.00003.. < 10^{-4}$. Portanto, $z \approx x_8 = 0.7034551$.

Uma estimativa do erro cometido é dada por:

$$|z - x_8| \leq \frac{L}{1 - L}|x_8 - x_7| =$$

2. Considere a equação: $sen(x) + 4x^2 - 1 = 0$

i) Mostre que se tomarmos $x_0 = 1$ então o método de Newton converge para a única raiz $z \in [0,\ 1]$.

SOLUCAO Se tomarmos $x_0 = 1$, para que o método de Newton convirja para a raiz $z \in [0,\ 1]$, é suficiente que as seguintes condições verifiquem:

i) $f(0)f(1) < 0$ (existência da raiz)
$f(0) = \sin(0) + 4 * 0 - 1 = -1$ e $f(1) = \sin(1) + 4 * 1 - 1 = 3.84147.....$ Logo $f(0)f(1), 0$.

ii) $f'(x) \neq 0 \in [0,\ 1]$ (unicidade da raiz)
$f'(x) = \cos(x) + 8\,x > 0,\ \forall\ x \in [0,\ 1]$desde que $\cos(x) > 0) \in [0,\ 1] \Longrightarrow f'(x) \neq 0 \forall\ x \in [0,\ 1]$.

iii) $f''(x) \geq 0$ ou $f''(x) \leq 0,\ \forall\ x \in [0,\ 1]$ $(f(x)$ não muda de concavidade em $[0,\ 1])$
$f''(x) = -\sin(x) + 8 \geq 0\ ,\ \forall\ x \in [0,\ 1]$ desde que $\sin(x) \leq 1 \in [0,\ 1]$.

iv) $f(x_0)f''(x) \geq 0\ ,\ \forall\ x \in [0,\ 1]$
Para $x_0 = 1$ temos: $f(1) * f''(x) \geq 0$ desde que $f(1) > 3.84147.... > 0$ e $f(x_0)f''(x) \geq 0\ ,\ \forall\ x \in [0,\ 1]$.

Portanto, de i)-iv), podemos concluir que o método de Newton converge para $x_0 = 1$.

ii) Calcule aproximações x_{n+1} para z até que $|z - x_{n+1}| < 10^{-6}$.

Calculando as iterações, obtemos:

$x_0 = 1.0$	$x_1 = 0.550194964156201$
$x_1 = 0.550194964156201$	$x_2 = 0.410546335511329$
$x_2 = 0.410546335511329$	$x_3 = 0.393098412427275$
$x_3 = 0.393098412427275$	$x_4 = 0.392813841019153$
$x_4 = 0.392813841019153$	$x_5 = 0.392813765172900$

3. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ abaixo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva esse sistema linear pelo método de eliminação de Gauss

SOLUCAO: Aplicando o metodo de eliminacao de Gauss, obtem-se o sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7/2(3.5) & 1 \\ 0 & 0 & 27/7(3.8571) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4(0.75) \\ 9/14(0.6429) \end{bmatrix}$$

que tem como solução: $x_1 = 0.1667, x_2 = 0.1667, x_3 = 0.1667$.

1o. Passo - $E_2 - m_{21}E_1 -> E_2$, onde $m_{21} = 1/4$, $E_2 : 0 \quad 7/2 \quad 1 : 3/4$

- $E_3 - m_{31}E_1 -> E_3$, onde $m_{31} = 1/4$, $E_3 : 0 \quad 1/2 \quad 4 : 3/4$

2o. Passo - $E_3 - m_{32}E_2 -> E_3$, onde $m_{32} = 0.5/3.5$, $E_3 : 0 \quad 0 \quad 27/7(3.8571) : 9/14(0.6429)$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0 & 3.8571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.6429 \end{bmatrix}$$

Determine a decomposição LU da matriz A desse sistema linear e obtenha a 1a. coluna de A^{-1}.

SOLUCAO:

A primeira coluna de A^{-1}, denotada por $\mathbf{X} = [X_{11} \quad X_{12} \quad X_{13}]$, é obtida pela solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as formulas para o calculo das matrizes L e U obtem-se:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0 & 3.8571 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas lineares $L\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ e $U\mathbf{X} = \mathbf{y}$, obtém-se:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.25 & -0.2143 \end{bmatrix}^T \text{ ou } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.0} & -\mathbf{1/4} & -\mathbf{3/14} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

e

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.2778 & -0.0556 & -0.0556 \end{bmatrix}^T \text{ ou } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{5/18} & -\mathbf{1/18} & -\mathbf{1/18} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS - MET. ITERATIVOS

4. Considere o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ onde a matriz de iteração é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esse método é convergente? Justifique sua resposta.

5. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 10 & \beta & 1 \\ \alpha & \beta & 10 & 1 \\ \beta & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} \tag{1}$$

i) Para quais valores de α e β o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge para a solução do mesmo independente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

ii) Tome $\alpha = \beta = 1$ e $\mathbf{x}^{(0)} = [1.5\ 1.5\ 1.5\ 1.5]$ e, usando o método de Jacobi, calcule aproximações $\mathbf{x}^{(k+1)}$ até que $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty < 0.01$ e calcule um majorante para o erro cometido.