SME602 Cálculo Numérico * 2^{a} Prova**
MOSTRAR TODOS OS CÁLCULOS
***********FAZER CÁLCULOS COM 4 CASAS DECIMAIS******* - 05/12/2019**

Nome: **No. USP:**

1. Considere a função tabelada:

x_i	0.2	0.6	0.8	1.3
$f(x_i)$	1.494	3.798	6.726	22.306

a) **[1.0]** Obtenha o valor aproximado de $f(0.7)$ utilizando o polinômio interpolador $P_2(x)$.

Solução: O polinômio interpolador em 3 pontos é $P_2(x)$. Escolhendo 3 pontos da tabela: $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.8$. O polinômio interpolador segundo a regra de interpolação de Lagrange será:

$$P_2(x) = l_0(x) * f(x_0) + l_1(x) * f(x_1) + l_2(x) * f(x_2).$$

Sendo,

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1) * (x - x_2)}{(x_0 - x_1) * (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.6) * (x - 0.8)}{(0.2 - 0.6) * (0.2 - 0.8)} = \frac{(x - 0.6) * (x - 0.8)}{0.240000}.$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0) * (x - x_2)}{(x_1 - x_0) * (x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.2) * (x - 0.8)}{(0.6 - 0.2) * (0.6 - 0.8)} = \frac{(x - 0.2) * (x - 0.8)}{-0.080000}.$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0) * (x - x_1)}{(x_2 - x_0) * (x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.2) * (x - 0.6)}{(0.8 - 0.2) * (0.8 - 0.6)} = \frac{(x - 0.2) * (x - 0.6)}{0.120000}.$$

Logo,

$$l_0(0.7) = \frac{(0.7 - 0.6) * (0.7 - 0.8)}{0.240000} = -0.041666.$$

$$l_1(0.7) = \frac{(0.7 - 0.2) * (0.7 - 0.8)}{-0.080000} = 0.625000.$$

$$l_2(0.7) = \frac{(0.7 - 0.2) * (0.7 - 0.6)}{0.120000} = 0.411666.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(0.7) \approxeq P_2(0.7) &= l_0(0.7) * f(x_0) + l_1(0.7) * f(x_1) + l_2(0.7) * f(x_2). \\ &= -0.041666 * f(0.2) + 0.625000 * f(0.6) + 0.416666 * f(0.8). \\ &= 0.041666 * 1.494000 + 0.625000 * 3.798000 + 0.416666 * 6.726000. \\ &= 5.113996. \end{aligned}$$

b) **[0.5]** Sabe-se que $|f^j(x)| < 6 * 2^j \ \forall \ x \ \in \ [0.25, \ 1.3]$. Determine um majorante para o erro cometido quando aproximamos $f(0.7)$ por $P_2(0.7)$.

Solução: O erro é majorado pela expressão:

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq |(x - x_0) * (x - x_1) * (x - x_2)| \frac{\max_{x \in [0.2 \ \ 1.3]} |f'''(x)|}{3!}.$$

Como $x = 0.7$, $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.8$, logo

$$|f(0.7) - P_2(0.7)| \leq |(0.7-0.2)*(0.7-0.6)*(0.7-0.8)|\frac{6*2^3}{3!}.$$

Portanto,

$$|f(0.7) - P_2(0.7)| \leq |(0.5)*(0.1)*(-0.1)|*8 = 0.040000.$$

c) [1.0] Determine a função $g(x) = \alpha_0\, e^x + \alpha_1\, e^{2x}$, que aproxima $f(x)$ pelo método dos Mínimos Quadrados. Qual o erro cometido nessa aproximação?

Solução: Têm-se que $g(x) = \alpha_0 * g_0(x) + \alpha_1 * g_1(x)$, onde $g_0(x) = e^x$, $g_1(x) = e^{2x}$. Pelo método dos Mínimos Quadrados, α_0 e α_1 são obtidos pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (g_0, g_0) & (g_1, g_0) \\ (g_0, g_1) & (g_1, g_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, g_0) \\ (f, g_1) \end{bmatrix}.$$

Onde $g_0 = \begin{bmatrix} 1.221402 \\ 1.822118 \\ 2.225540 \\ 3.669296 \end{bmatrix}$, $g_1 = \begin{bmatrix} 1.491824 \\ 3.320116 \\ 4.953032 \\ 13.463738 \end{bmatrix}$ e $f = \begin{bmatrix} 1.494000 \\ 3.798000 \\ 6.726000 \\ 22.306000 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$\begin{bmatrix} 23.228698 & 68.297370 \\ 68.297370 & 219.0534 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.5615 \\ 348.47483 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema linear obtemos: $\alpha_0 = -1.59582$ e $\alpha_1 = 2.08837$.

E assim concluí-se que a função $g(x) = -1.59582 * e^x + 2.08837 * e^{2x}$.

d) [1.0] Calcule a e b de modo que $g(x) = ae^{bx}$ aproxime a função tabelada.

Solução: $g(x) = ae^{bx}$ portanto $f \approx ae^{bx} \Rightarrow ln\,(f) \approx ln\,(a) + bx$, onde $\alpha_0 = \ln(a)$, $\alpha_1 = b$, $g_0 = 1$ e $g_1 = x$.

Desta maneira, pelo método dos Mínimos Quadrados, aproximamos a função $F(x) = \ln(f(x))$ pela função $G(x) = \alpha_0 * g_0(x) + \alpha_1 * g_1(x)$ onde:

$$g_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\; g_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1.3 \end{bmatrix} \text{ e } F = F(x_i) = \begin{bmatrix} \ln(1.494000) = 0.401457 \\ \ln(3.798000) = 1.33447 \\ \ln(6.726000) = 1.90598 \\ \ln(22.30600) = 3.10485 \end{bmatrix}.$$

Observe que, α_0 e α_1 seram obtidos pela solução do sistema linear. Logo,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2.900000 \\ 2.900000 & 2.730000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.74676 \\ 6.44207 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo esse sistema linear obtém-se:$\alpha_0 = -0.10491$, $\alpha_1 = 2.47118$ Assim, $\alpha_0 = \ln(a)$, aplicando a exponencial $a = e^{(\alpha_0)} \Rightarrow a = 0.90040$ e $b = \alpha_1 = 2.47118$. Portanto, $g(x) = 0.90040 * e^{(2.47118*x)}$.

2. **[1.0]** Prove que $\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1, \ \forall x \ \in \ \mathbb{R}, \ n \geq 1.$

Solução: Pela fórmula do erro, têm-se:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

onde $\xi_x \ \in [x_0, \ x_n]$, $\forall \ f \ \in \ C^{(n+1)}$. Fazendo $f(x) = 1$ obtém-se

$f(x) - P_n(x) = 0$ (desde que $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} = 0$), o que implica em $P_n(x) = 1$. A fórmula de Lagrange para $P_n(x)$ fornece:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) * f(x_k)$$

de onde obtemos (desde que $f(x_k) = 1$):

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

3. Deseja-se aproximar $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ pela fórmula de quadratura $I_Q(f) = A*[f(z)+f(-z)]$, onde $z \ \in [-1, \ 1]$ e A é um número real.

(i) **[1.5]** Suponha que grau de precisão de $I_Q(f)$ é $r \geq 2$ e determine A e z.

Solução: Pelo método dos coeficientes indeterminados, para que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 2$ é suficiente que:

$I_Q(1) = I(1) = \int_{-1}^{1} 1 \ dx = 2$ como $I_Q(1) = A * [1 + 1] = 2A \ \Rightarrow \ 2 * A = 2.$

$I_Q(x) = I(x) = \int_{-1}^{1} x \ dx = 0$ como $I_Q(x) = A * [z + (-z)] = 0 \ \Rightarrow \ 0 = 0.$

$I_Q(x^2) = I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \ dx = 2/3$ como $I_Q(x^2) = A*[z^2+(-z)^2] = 2*A*z^2 \ \Rightarrow \ 2*A*z^2 = 2/3.$

Resolvendo esse sistema, obtém-se portanto: $A = 1$ e $z = \pm \ 0.577350.$

(ii) **[0.5]** Mostre que $I_Q(P_3) = I(P_3)$ onde $P_3(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3.

Solução: Para provar que $I_Q(P_3) = I(P_3)$ onde $P_3(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, basta mostrar que o grau de precisão de $I_Q(f)$ é $r \geq 3$.

Observamos que $I_Q(f)$ satisfaz: $I_Q(1) = I(1)$, $I_Q(x) = I(x)$, $I_Q(x^2) = I(x^2)$. Além disso, temos $I_Q(x^3) = A(z^3 - z^3) = 0$ e $I(x^3) = \int_{-2}^{2} x^3 \ dx = 0$. Logo, $I_Q(x^3) = I(x^3)$ e portanto o grau de precisão de $I_Q(P_3)$ é $r \geq n = 3$.

4. Considere a integral $I(f) = \int_{-1}^{1}(1 + x^2)(1 - x^2)dx$.

(a) **[1.0]** Calcule $I(f)$ utilizando a fórmula de Gauss-Chebyshev com $N = 3$ (I_C^3).

Solução: Observe que, $I(f) = \int_{-1}^{1}(1+x^2)*(1-x^2)dx$, porém para utilizar a fórmula de Gauss-Chebyshev é preciso reescrever esta função. Isto é,

$$\begin{aligned} I(f) = \int_{-1}^{1}(1+x^2)*(1-x^2)dx &= \int_{-1}^{1}(1-x^4)dx. \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}*\left((1-x^4)*\sqrt{1-x^2}\right)dx. \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Gauss-Chebyshev para $N=3$ têm-se:

$$I_C^3(f) = A_0 * f(x_0) + A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2),$$

em que x_0, x_1 e x_2 são os zeros do polinômio de Chebyshev de grau 3. Da tabela, obtemos os valores dos zeros e dos coeficientes A_0, A_1 e A_2:

x_i	0.866025	0	−0.866025
A_i	1.047200	1.047200	1.047200

Como $f(x) = (1-x^4)*(\sqrt{1-x^2})$ então: $f(x_0) = f(0.866025) = 0.218750$, $f(x_1) = f(0) = 1$ e $f(x_2) = f(-0.866025) = 0.218750$. Portanto,

$$I_C^3(f) = A_0 * f(x_0) + A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2)$$

será,

$$I_C^3(f) \approx 1.047200 * 0.218750 + 1.047200 * 1 + 0.218750 * 1.047200 = 1.505350.$$

(b) **[1.0]** Calcule $I(f)$ pelo método de Simpson 1/3 com $N=6$ ($I_S^6(f)$).

Solução: Temos que $h = 2/6 = 0.3333333$ e montamos a tabela

x_i	−1.000000	−0.666667	-0.3333333	0.0	0.3333333	0.666667	1.0
$f(x_i)$	0.0	0.8024691	0.9876543	1.0	0.9876543	0.8024691	0.0

Logo, usando $I_S^6(f)$ obtemos:

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)*(1-x^2)dx = \frac{0.3333333}{3}\Big\{0.0 + 0.0 + 4*(0.8024691 + 1.0 + 0.8024691)$$
$$+2*(0.9876543 + 0.9876543)\Big\} = 1.5967076$$

(c) **[0.5]** Qual dos valores $I_C^3(f)$ ou $I_S^6(f)$ é o mais preciso? Justifique a sua resposta.

Solução: A solução analítica desta integral é

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(1+x^2)*(1-x^2)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^4)dx &= \int_{-1}^{1}1\,dx - \int_{-1}^{1}x^4dx. \\ &= x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}. \\ &= 2 - \frac{2}{5}. \\ &= 1.600000. \end{aligned}$$

Calculando os erros, obtemos: $|E_C^3(f)| = |I(f) - I_C^3(f)| = |1.600000 - 1.505350| = 0.09465$ e $|E_S^6(f)| = |I(f) - I_S^6(f)| = |1.600000 - 1.5967076| = 0.0032924$, donde vemos que $|E_S^6(f)| < |E_C^3(f)|$.

Logo, pode-se concluir que $I_S^6(f) = 1.5967076$ é mais preciso que $I_C^3(f) = 1.505350$.

5. [1.5] Considere o PVI: $\begin{cases} y' = y(1+x^2)\ , & x \in [0.0, 0.4] \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$. Tome $h = 0.2$ e obtenha $y(0.4)$ pelo método de Euler Modificado.

Solução: Como $h = 0.2$ tem-se: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$. O método de Euler modificado fornece as equações:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{j+1} = &\ y_j + h * f(x_j, y_j), \\ y_{j+1} = &\ y_j + \frac{h}{2} * [f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \bar{y}_{j+1})]. \end{aligned}$$

- $j = 0$: Cálculo de y_1, considerando $h = 0.2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $x_1 = 0.2$.

  $f(x_0, y_0) = y_0 * 1 + x_0^2) = 1.$

  $\bar{y}_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = 1 + 0.2 * 1 = 1.2.$

  $f(x_1, \bar{y}_1) = \bar{y}_1 * (1 + x_1^2) = 1.2 * (1 + 0.04) = 1.2480.$

  $y_1 = y_0 + \frac{h}{2} * [f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1)] = 1 + \frac{0.2}{2} * [1 + 1.2480] = 1.2248.$

- $j = 1$: Cálculo de y_2, considerando $h = 0.2$, $x_1 = 0.2$, $y_1 = 1.2248$ e $x_2 = 0.4$.

  $f(x_1, y_1) = y_1 * (1 + x_1^2) = 1.2248 * (1 + 0.04) = 1.273792.$

  $\bar{y}_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1) = 1.2248 + 0.2 * 1.273792 = 1.479558.$

  $f(x_2, \bar{y}_2) = \bar{y}_2 * (1 + x_2^2) = 1.479558 * (1 + 0.16) = 1.716287.$

  $y_2 = y_1 + \frac{h}{2} * [f(x_1, y_1) + f(x_2, \bar{y}_2)] = 1.2248 + \frac{0.2}{2} * [1.273792 + 1.716287] = 1.523808.$

Portanto, $y(0.4) = y_2 = 1.523807$.

Formulário

$$
\begin{aligned}
l_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\
&= \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}
\end{aligned}
$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + \cdots + l_n(x)f(x_n)$$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \text{ onde } \xi_x \;\in [x_0,\ x_n]$$

$$g(x) = \alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x)$$

$$
\begin{bmatrix}
(\Phi_0,\Phi_0) & (\Phi_0,\Phi_1) & \cdots & \cdots & (\Phi_0,\Phi_m) \\
(\Phi_1,\Phi_0) & (\Phi_1,\Phi_1) & \cdots & \cdots & (\Phi_1,\Phi_m) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
(\Phi_m,\Phi_0) & (\Phi_m,\Phi_1) & \cdots & \cdots & (\Phi_m,\Phi_m)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (\mathbf{f},\Phi_0) \\ (\mathbf{f},\Phi_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ (\mathbf{f},\Phi_m) \end{bmatrix}
$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\eta)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\eta)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_N) + \sum_{j=1}^{N-1} 2f(x_j)\right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \text{ onde } \xi \;\in\; [a,\ b]$$

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_N) + 4\sum_{j=1}^{N/2} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{N/2-1} f(x_{2j})\right] - \frac{Nh^5}{180} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \;\in\; [a,\ b].$$

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Formula de recorrência para polinômios ortogonais

$$\phi_0(x) = 1\ , \qquad \phi_1(x) = x\phi_0(x) + \alpha_0\phi_0(x)\ , \qquad \alpha_0 = -\frac{(x\phi_0(x),\phi_0(x))}{(\phi_0(x),\phi_0(x))},$$

$$\phi_{n+1}(x) = x\phi_n(x) + \alpha_n\phi_n(x) + \beta_n\phi_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\alpha_n = -\frac{(x\phi_n(x),\phi_n(x))}{(\phi_n(x),\phi_n(x))}, \quad \beta_n = -\frac{(x\phi_n(x),\phi_{n-1}(x))}{(\phi_{n-1}(x),\phi_{n-1}(x))}$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \cdots\ , \qquad y'_n = f_n, \quad y''_n = (f_x + f_y f)_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy'_n)\right], \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$