SME602 - Cálculo Numérico - RESOLUÇÃO 1a-PROVA - 15/10/2019

1. Considere a sequência

$$x_{n+1} = (3 + 8x_n + 5x_n^2 - x_n^3)/12 \tag{1}$$

(a) Utilize o método do ponto fixo e mostre que a sequência (1) converge para $z \in [4,\ 4.5]$, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [4,\ 4.5]$.

SOLUÇÃO: Temos que a função iteradora da sequência (1) é $g(x) = (3+8x+5x^2-x^3)/12$. Precisamos mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições do Teorema do Ponto Fixo em $I = [4,\ 4.5]$ ou seja,

(i) $g(x)$ é continua e diferenciável em I - Condição satisfeita desde que $g(x)$ é um polinômio

(ii) $g(I) \in I$.
$g'(x) = (8 + 10x - 3x^2)/12$ e $g''(x) = (10 - 6x)/12$. Logo, se $x \in [4,\ 4.5]$[1] $\Longrightarrow g''(x) \leq 0 \Longrightarrow g'(x)$ é descrescente $\Longrightarrow g'(4) \geq g'(x) \geq g'(4.5)$.
Como $g'(4) = 0$ e $g'(4.5) = -0.6458$ vemos que $g'(x) \leq 0 \Longrightarrow g(x)$ é uma função descrescente em I e portanto $g(4.0) = 4.2500 \geq g(x) \geq g(4.5) = 4.0938$ o que mostra que $g(I) \subset I$.

(iii) $\max_{x \in I} |g'(x)| < 1$. Como $g'(x)$ é decrescente, $g'(4) = 0 \geq g'(x) \geq g'(4.5) = -0.6458 \Longrightarrow |g'(x)| \leq L = 0.6458$.

Logo, as condições (i)-(iii) são satisfeitas e pelo teorema da iteração do ponto fixo, a sequência gerada pela Eq. (1) converge para o único ponto fixo z de $g(x)$ em I.

(b) Qual é a ordem de convergência da sequência? Use $x_0 = 4.5$, calcule x_3 e forneça uma estimativa para o erro cometido. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA.

SOLUÇÃO: Como $g'(4) = 0.0 \geq g'(x) \geq g'(4.5) = -0.6458$ vemos que $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in [4,\ 4.5] \Longrightarrow g'(z) \neq 0 \Longrightarrow$ (pode tomar $g'(z) \approx x_3 = 4.2138187 \neq 0$)a ordem de convergência é $p = 1$ (LINEAR).

Seja $x_0 = 4.5$. Logo,

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = (3 + 8x_0 + 5x_0^2 - x_0^3)/12 = 4.09375,\\
x_2 &= g(x_1) = (3 + 8x_1 + 5x_1^2 - x_1^3)/12 = 4.2448044,\\
x_3 &= g(x_2) = (3 + 8x_2 + 5x_2^2 - x_2^3)/12 = 4.2138187.
\end{aligned}$$

Cálculo do erro: $|z - x_3| \leq \dfrac{0.6458}{1 - 0.6458}|4.2138187 - 4.244804| = .0564951.$

(c) [1.0] Mostre que z, definido em **1(a)**, é raiz da equação

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0 \tag{2}$$

e prove que o método de Newton aplicado a (2) converge para z se tomarmos como aproximação inicial $x_0 = 4.5$.

SOLUÇÃO: De fato, se z é ponto fixo de $g(x)$ então $g(z) = z \Longrightarrow (3 + 8z + 5z^2 - z^3)/12 = z \Longrightarrow (3 + 8z + 5z^2 - z^3) = 12z \Longrightarrow z^3 - 5z^2 + 4z - 3 = 0 \Longrightarrow z$ é raiz da equação (2).

Se tomarmos $x_0 = 4.5$, então, para o método de Newton convergir para a raiz $z \in I = [4,\ 4.5]$ é suficiente que:

(i) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3 \in C^2[4,\ 4.5]$ - condição satisfeita porque $f(x)$ é polinômio de grau 3.

[1](desde que $g''(4) = -1.1667, g''(4.5) = -1.4167$)

(ii) $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$

é fácil ver que $f'(x) = 3x^2 - 10x + 4 \geq 8.0 > 0, \forall x \in [4,\ 4.5]$

(iii) $f''(x) = 6x - 10 \geq 4 > 0, \forall x \in [4,\ 4.5]$

(iv) $f(4.5) = (4.5)^3 - 5.0 * (4.5)^2 + 4.0 * (4.5) - 3 = 4.8750$. Logo, $f''(x) * f(4.5) \geq 0\ \forall x\ inI$.

Como as condiçoes (i)-(iv) estão satisfeitas, se usarmos $x_0 = 4.5$ o método de Newton converge para única raiz de $f(x)$ em I.

2. Seja a matriz A abaixo. Utilize o método de Eliminação de Gauss e calcule a 3a. coluna da matriz A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 2.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6 & 2.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.6 & 0.6 & 2.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.6 & 0.6 & 2.0 \end{bmatrix}$$

Dada equação $AA^{-1} = I$, a terceira coluna de A^{-1} é obtida resolvendo o sistema linear $AX = e_3$ onde X representa a 3a. coluna de A^{-1} e $e_3 = [0\,0\,1\,0]^T$.

Transformando a matriz A do sistema em uma matriz aumentada e aplicando o método de Gauss, tem-se:

PASSO 1: Transformar A em $A^{(2)}$. **Verifica-se que a mariz A é de diagonal dominante, e portanto não é necessário fazer pivotamento parcial**.

Calcular os multiplicadores: $m_{21} = 0.6/2.0$ e $m_{31} = 0.6/2.0$

$$A = \begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.60000 & 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

$$E_2 - (0.30000)\, E_1 \Rightarrow E_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.85000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

$$E_3 - (0.30000)\, E_1 \Rightarrow E_3$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.85000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.45000 & 2.00000 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

PASSO 2: Transformar $A^{(2)}$em $A^{(3)}$: Calcular os multiplicadores: $m_{32} = 0.450/1.850 = 0.24324$ e $m_{42} = 0.6/1.850 = 0.32432$

$$E_3 - (0.24324)\, E_2 \Rightarrow E_3$$

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.85000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.87838 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.60000 & 0.60000 & 2.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

$$E_4 - (0.32432)\, E_2 \Rightarrow E_4$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.85000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.87838 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.43784 & 2.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

PASSO 3: Transformar $A^{(3)}$em $A^{(4)}$: $m_{43} = 0.43784/1.87838 = 0.23309$

$$E_4 - (0.23309)\, E_3 \Rightarrow E_4$$

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.85000 & 0.50000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.87838 & 0.50000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 1.88345 & -0.23309 \end{pmatrix}$$

Resolvendo agora $A^{(4)}X = e_3$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 2.00000 & 0.50000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.85000 & 0.50000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.87838 & 0.50000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.88345 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 1.00000 \\ -0.23309 \end{pmatrix}$$

que tem como solução,

$$X = \begin{pmatrix} 0.038197 \\ -0.152788 \\ 0.565317 \\ -0.123759 \end{pmatrix}.$$

3. Tomando $\mathbf{x}^{(0)} = [1.0\ 1.0\ 1.0]^T$, o método de Jacobi aplicado ao sistema linear:

$$\begin{cases} 1.7x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 = 1.9 \\ 0.25x_1 + 1.5x_2 + 0.1x_3 = -1.05 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 + 1.8x_3 = 3.8 \end{cases}$$ produziu as iterações:

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$
1.0	0.705882	1.023529	0.974753	$**\, 1.004006 \,**$	0.9976739
1.0	−0.933333	−0.936165	−1.007785	$**\, -0.994971 \,**$	−1.0010993
1.0	1.777777	2.057952	1.987678	$**\, 2.006475 \,**$	1.9985509

(a) Calcule o vetor $\mathbf{x}^{(4)}$

Solução: Ver valores mostrados na tabela na cor azul entre asteristicos.

(b) O método está convergindo? Justifique a sua resposta.

Solução: Pode-se observar que as iterações estão convergindo para o vetor $\mathbf{x} = [1.0000 \quad -1.00000 \quad 2.00000]^T$. Para provar esse fato, multiplicando a matriz A do sistema linear pelo vetor $\mathbf{x}$ vemos que reproduz o vetor $[1.9 \quad -1.05 \quad 3.8]'$ o que mostra que $\mathbf{x}$ é a solução do sistema linear. Para mostrar a convergência, basta calcular os vetores erros:

$$EQ.(***) \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty = \|[-0.004006 \quad -0.005029 \quad -0.006475]^T\|_\infty = 0.006475 \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(5)}\|_\infty = \|[0.002326 \quad 0.001099 \quad 0.001449]^T\|_\infty = 0.002326 \\ \text{Como } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(5)}\|_\infty < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty, \text{ podemos concluir que o método} \\ \text{está convergindo.} \end{cases}$$

(c) Forneça uma estimativa do erro na iteração $\mathbf{x}^{(5)}$. Solução: A fórmula do erro fornece:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(5)}\|_\infty \leq \frac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|[\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty,$$

onde $\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)} = [-0.00620 - 0.00613 - 0.00793]^T$ e

$$C_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.235294 & -0.176470; \\ -0.1666667 & 0 & -0.0666667 \\ -0.222222 & -0.111111 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\|C_J\|_\infty = 0.41176$ e $\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty = 0.00793$ donde obtemos:

$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(5)}\|_\infty \leq \dfrac{\|C_J\|_\infty}{1 - \|C_J\|_\infty} \|[\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty = \dfrac{0.41176}{1 - 0.41176} * (0.00793) = 0.005555$ (que está de acordo com a EQ. (***)).

4. Considere o método iterativo definido pelas equações

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.2\, x_1^{(k)} + 0.5\, x_2^{(k)} + 0.6 \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2\, x_1^{(k)} + 0.6\, x_3^{(k)} + 0.9 \\ x_3^{(k+1)} &= 0.4\, x_2^{(k)} + 0.4\, x_3^{(k)} + 1.2 \end{aligned}\right\}$$ Esse método é convergente? Justifique sua resposta.

Solução: Na forma matricial $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, esse método iterativo é dado por:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.6 \\ 0.0 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

Se $|C|_\infty < 1$.. Calculando $|C|_\infty$, obtemos, $|C|_\infty = \max\{0.2 + 0.5, 0.2 + 0.6, 0.4 + 0.4\} = 0.8$.
Logo, como $|C|_\infty = 0.8$, o método converge.

5. Considere o sistema linear: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Mostre que o método de Jacobi aplicado a esse sistema linear converge e o método de Gauss-Seidel não converge.

Solução: Como a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ não tem diagonal estritamente dominante, precisamos analisar a matriz de iteração do método de Jacobi, como segue:

$C_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.. Como $|C_J|_\infty = \max\{4,2,4\} = 4$, precisamos calcular o raio espectral de C_J que é dado por: $\rho(C_J) = \max|\lambda_i|$, onde λ_i é auto-valor de C_J. Calculando os auto-valores, vem:

$|C_J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies -\lambda^3 = 0 \implies \lambda = 0 \implies \rho(C_J) = 0 \implies$ o método converge.

Com relação ao método de Gauss-Seidel, precisamos obter a matriz de iteração $C_{GS} = -(L+D)^{-1} * U$ e calcular o raio espectral, como segue:

$$C_{GS} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\overbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.5 \end{bmatrix}}^{(L+D)^{-1}} * \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz C_{GS} é uma matriz triangular superior, os auto-valores são: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ e portanto $\rho_{GS} = 2 \implies$ o método diverge.

6. Considere o sistema não-linear.

$$\begin{cases} 3x + y + \sin^2(z) = 3.4049 \\ x + 3xy = +x^2 z + 1.3453 \\ 2x + xyz = 2.2070 + y^2 z \end{cases}$$

O método de Newton aplicado a esse sistema não-linear fornece:

$$\begin{cases} \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)} \end{cases}$$

Tome $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$.

Pelo método de Newton para sistemas não lineares sabemos que,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})$ é a matriz Jacobiana da função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ aplicada no vetor $\mathbf{x}^{(0)}$.

Calculando $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})$ temos,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 3x + y + \sin^2(z) - 3.4049 \\ x + 3xy - x^2 z - 1.3453 \\ 2x + xyz - 2.2070 - y^2 z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2sin(z)cos(z) \\ 1 + 3y - 2xz & 3x & -x^2 \\ 2 + yz & xz - 2yz & xy - y^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 1.00000 & 3.00000 & -1.00000 \\ 2.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.40490 \\ -0.34530 \\ -0.20700 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\right]\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ é um sistema linear que precisa ser resolvido para determinar $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 1.00000 & 3.00000 & -1.00000 \\ 2.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40490 \\ 0.34530 \\ 0.20700 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss (**sem pivotamento parcial, porque a matriz tem diagonal dominante**) ao sistema tem-se:

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.40490 \\ 1.00000 & 3.00000 & -1.00000 & 0.34530 \\ 2.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.20700 \end{bmatrix}$$

$$E_2 - (0.33333)\,E_1 \Rightarrow E_2$$

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.40490 \\ 0.00000 & 2.66667 & -1.00000 & 0.21033 \\ 2.00000 & 0.00000 & 0.0000 & 0.20700 \end{bmatrix}$$

$$E_3 - (0.66667)\,E_1 \Rightarrow E_3$$

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.40490 \\ 0.00000 & 2.66667 & -1.00000 & 0.21033 \\ 0.00000 & -0.66667 & 0.00000 & -0.06293 \end{bmatrix}$$

$$E_3 - (-0.25000)\, E_2 \Rightarrow E_3$$

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 & 0.40490 \\ 0.00000 & 2.66667 & -1.00000 & 0.21033 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.25000 & -0.01035 \end{bmatrix}$$

E portanto tem-se,

$$\begin{bmatrix} 3.00000 & 1.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 2.66667 & -1.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.25000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40490 \\ 0.21033 \\ -0.01035 \end{bmatrix}$$

e tem como solução

$$\Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.10350 \\ 0.09440 \\ 0.04140 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x^{(1)}$ pode ser determinado da seguinte maneira,

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.10350 \\ 0.09440 \\ 0.04140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.10350 \\ 0.09440 \\ 0.04140 \end{bmatrix}.$$