Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Prof: Murilo

Lista de Exercícios: Integração Numérica

1. Obtenha a fórmula de integração de Newton-Cotes do tipo fechado, para integrar $f(x)$ com $n = 3$ (essa fórmula é conhecida como **Simpson 3/8**), ou seja sobre 4 pontos: $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h = b, h = (b - a)/3)$. Usando a fórmula obtida, calcule
$$I(f) = \int_2^3 xe^{\frac{x}{2}} dx.$$

2. Calcule as integrais a seguir pela fórmula do trapézio e pelas fórmula de Simpson 1/3 usando 6 divisões do intervalo de integração.
$$I) \int_1^{2.5} x \ln x dx, \quad II) \int_{-1.5}^{0} xe^x dx$$

3. Nas integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo (N), podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

4. Considere a função $f(x)$ dada pela tabela:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	5	1	5	35

   a) Calcule uma aproximação para
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx,$$
   usando a fórmula de Simpson 1/3.

   b) Se os valores tabelados são de um polinômio de grau 3 o que pode ser afirmado sobre o erro cometido na aproximação de $I(f)$ pela fórmula 1/3 de Simpson?

5. De um velocímetro de um automóvel foram obtidos as seguintes leituras de velocidade instantânea:

$t(min.)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$v(km/h)$	23	25	30	35	40	45	47	52	60

   Calcule a distância em quilômetros, percorrida pelo automóvel usando a regra de Simpson.

6. Aproxime pela regra de Simpson o comprimento de arco da curva:
$$y = 4x^2 - 3x$$

de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Obs: Lembre que o comprimento de arco de uma curva $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ é dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

7. Escolha uma regra de quadratura sobre pontos igualmente espaçados de h e avalie

$$\int_{-1}^0 xe^x dx$$

com duas casas decimais corretas.

8. Considere a integral:

$$I(f) = \int_0^{0.8} (x^2 - \cos(x)) dx.$$

a) Quantos intervalos seriam necessários para aproximar $I(f)$ usando a regra do trapézio, com erro inferior a 10^{-2}.

b) Calcule $I(f)$ com o h obtido no item **a)**).

9. Pretende-se obter uma fórmula de integração

$$I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de maneira que seja pelo menos de grau 2 para a integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

b) Mostre que a fórmula I_Q é de pelo menos grau 3 e termine x_1 de modo que I_Q seja de grau 5.

c) Determine x_1 de maneira que tenhamos $A_0 = A_1$.

10. Determine A_0, A_1, A_2 de modo que a fórmula de integração

$$\int_0^h \sqrt{x} f(x) dx \approx A_0 f(h/4) + A_1 f(h/2) + A_2 f(3h/4)$$

tenha grau de precisão $r \geq 2$. Determine o grau de precisão da fórmula obtida.

11. Considere a tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	-2	-1.5	-0.5	1.5	4.5	9.0	17.0

Sabendo que a fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(x)dx = Af(w); \quad a \leq w \leq b,$$

é exata para polinômios de grau ≤ 1, caclule A e w e use-os para aproximar

$$\int_0^3 f(x)dx.$$

12. Determine uma fórmula de quadratura de Gauss para aproximar

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

que seja exata quando $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3. Usando a fórmula obtida calcule

$$\int_0^1 (x^4 + x\sin(x))dx$$

13. Calcule, exatamente, utilizando fórmula de quadratura de Gauss adequado, a integral:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2-2x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

14. Calcule exatamente

$$I(f) = \int_0^\infty \left(\frac{x^3+4x+2}{e^{2x}}\right) e^x dx.$$

utilizando uma fórmula de quadratura de Gauss.

15. Considere a integral

$$I(f) = \int_0^{1.6} x^{-x} dx$$

Obtenha o valor aproximado de $I(f)$, com 2 dígitos significativos corretos:

a) Usando fórmula de Simpson 1/3.

b) Usando fórmula de quadratura de Gauss.

Lembre-se que $lim_{x\to 0} x^x = 1$.

16. Considere a integral: $I(f) = \int_0^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

i) Calcule o número mínimo de intervalos, N, para que valor obtido pela fórmula de Simpson 1/3 composta forneça um erro menor que 10^{-3}.

ii) Com o N obtido, calcule uma aproximação para $I(f)$.

17. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_i	1.0	1.7	2.0
$f(x_i)$	6.0	13.28	17.0

a) Utilizando a fórmula de Lagrange (ou a fórmula de Newton), determine o polinômio interpolador de f nos pontos da tabela.
b) Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 2, determine o valor **exato** de

$$\int_1^2 f(x)dx$$

utilizando a fórmula de Simpson 1/3. Justifique sua resposta.

18. Pretende-se obter a fórmula de quadratura: $I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(2)$ para aproximar a integral
$$I(f) = \int_0^2 e^{-x} f(x) dx.$$

i) Determine A_0 e A_1 de forma que a regra seja exata quando $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 1.

ii) Usando a fórmula obtida, calcule uma aproximação para $\int_0^2 \frac{e^{-2x}}{x^2+1} dx$

19. Pelo método dos coeficientes indeterminados, pretende-se obter uma fórmula de quadratura do tipo $I_Q(f) = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$ para obter uma aproximação para a integral $I(f) = \int_{-1.5}^{1.5} f(x) dx$.

    a) Obtenha os parâmetros A_0, A_1 e A_2 de modo que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 2$.

    b) Calcule o valor aproximado da integral, no caso de f ser a função dada pela tabela abaixo

x_i	-1.0	0	1.0
$f(x_i)$	-2.0	3.0	5.0

.

    c) Seja f um polinómio de grau ≤ 3. Prove que o valor obtido pela fórmula encontrada na alínea **a)** é o mesmo que se obtém pela fórmula de Simpson 1/3.

20. Pretende-se obter a fórmula de quadratura $I_Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(0.25) + A_2 f(1)$ para aproximar a integral $I(f) = \int_0^1 f(x)(1+x^2)dx$.

    (a) Determine A_0, A_1 e A_2 de forma que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 2$.

    (b) Usando a fórmula obtida, calcule uma aproximação para

$$I(f) = \int_0^1 e^x \frac{(1+x)(1+x^2)}{x} dx \qquad \left[\text{quem não fez (a) use } A_0 = A_1 = A_2 = 1.0\right]$$

21. Calcule a integral abaixo utilizando a fórmula de Gauss-Chebyshev com $N = 3$ pontos. O resultado é exato? Justifique a sua resposta.
$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{x^6 - 4x^4 - 3x^3 - 2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

22. Utilizando uma fórmula de quadratura de Gauss, calcule o valor exato de $\int_0^\infty e^{-x}(1 + x^2 + x^6)\, dx$. Justifique a sua resposta.

23. Considere o problema:
$$I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx.$$

    a) Verifique que a aplicação da fórmula do trapézio primeiramente na direção Oy e depois na direção Ox, fornece:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2} \frac{(d-c)}{2} [f(a,c) + f(b,c) + f(a,d) + f(b,d)].$$

b) Verifique que discretizando [a,b] e [c,d] respectivamente pelos pontos:

$$x_i = a + ih; \quad 0 \leq i \leq m; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

$$y_j = a + jk; \quad 0 \leq j \leq n; \quad k = \frac{d-c}{n}$$

e então aplicando a fórmula do trapézio composta nas direções Oy e Ox, obtemos:

$$I \approx \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} f(x_i, y_j)$$

onde

$$a_{00} = a_{m0} = a_{0n} = a_{nn} = 1$$

$$a_{i0} = a_{in} = 2; \quad 1 \leq i \leq m-1$$

$$a_{0j} = a_{mj} = 2; \quad 1 \leq j \leq n-1$$

$$a_{ij} = 4, ; \quad 1 \leq i \leq m-1; \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

c) Usando a fórmula obtida em 10.2), com h = 0.5 e k = 0.25, avalie:

$$\int_0^1 \int_0^{0.5} \sqrt{x^2 + y^3} dy dx.$$