Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Prof: Murilo F. Tomé

Lista de Exercícios: Solução numérica de equações diferenciais ordinárias

O aluno deve fazer um programa em MATLAB que resolve um PVI's pelo método de EULER, um programa MATLAB para resolver PVI's pelo método da série de Taylor de 2a. ordem e outro programa que resolve PVI pelo método de EULER MODIFICADO e usar MATLAB para verificar se as soluções numéricas encontradas.

1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2x^3 - 2xy \\ y(0) = 1 \qquad\qquad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.15 \end{cases}$$

   Calcule $y(0.3)$

   1.1) pelo método de Euler,

   1.2) pelo algoritmo de Taylor de ordem 2.

2. Resolva aproximadamente o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = y + x^{\frac{3}{2}} \\ y(0) = 1 \qquad\qquad x \in [0, 0.2]; \quad h = 0.1 \end{cases}$$

   escolhendo K adequadamente tal que seja possível a aplicação do algoritmo de Taylor de ordem K.

3. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = xy - y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \qquad\qquad x \in [0, 0.2]; \quad h = 0.05 \end{cases}$$

   usando:

   3.1) pelo método de Euler,

   3.2) pelo método de Euler Modificado.

4. Reduza o problema de valor inicial de segunda ordem:

$$\begin{cases} 2yy'' - 4xy^2 + 2\sin(x)y^4 = 6, x \ \in \ [1, \ 1.3] \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 15 \end{cases}$$

   a um sistema de equações de primeira ordem. Faça $h = 0.1$ e calcule $y(0.2)$ pelo método de Euler.

5. Reduza o problema de valor inicial de terceira ordem:

$$\begin{cases} y''' - x^2 y'' + (y')^2 y = 0, \; x \;\in\; [0,\; 0.2] \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y'''(0) = 3 \end{cases}$$

a um sistema de equações de primeira ordem. Faça $h = 0.1$ e obtenha $y(0.2)$ pelo método da série de Taylor de 2a. ordem.

6. Resolva o problema de valor inicial de segunda ordem:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \qquad\qquad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.1 \end{cases}$$

pelo método de Euler Modificado.

7. Resolva o sistema de equações diferenciais abaixo pelo método de Euler e Euler Modificado. Compare as soluções com o valor exato. **Use $h = 0.1$ e $h = 0.05$**.

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + 2u_2 - (2t^2 + 1)e^{2t}, \quad 0 \leq t \leq 1, u_1(0) = 1 \\ u_2' &= 4u_1 + u_2 - (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad 0 \leq t \leq 1, u_2(0) = 1 \end{aligned}$$

Solução exata: $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}; \qquad u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2 e^{2t}.$

Fazer um programa em MATLAB que resolve PVI's provenientes de sistemas de equações de 1a. ordem (ou de PVI's provenientes de EDO's de ordem superior) pelo método de EULER e outro programa que resolve PVI pelo método de EULER MODIFICADO. Executar o programa e calcular as soluções numéricas e comparar com as respectivas soluções analíticas. Pode-se calcular o erro pela fórmula:

$$|Sol_{EXATA} - Sol_{NUMERICA}| = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \left[y(x_j) - y_j\right]^2}{\sum_{j=1}^{N} y^2(x_j)}}$$

onde $y(x_j)$ denota a respectiva solução analítica e y_j representa a respectiva solução numérica.

Fazer gráficos mostrando as soluções numérica e analíticas.