SME300 - Cálculo Numérico 2ª Prova - 24/06/2019
MOSTRAR TODOS OS RESULTADOS - CÁLCULOS COM 4 CASAS DECIMAIS

1. [**1.0**] Sabendo que $f(0) = 1.979425, f(0.5) = 2.4489,\ f(1.2) = 2.24570$ e $f(2) = 1.14921$ obtenha o valor aproximado de $f(0.7)$ utilizando o polinômio interpolador de grau ≤ 2.
SOLUÇÃO: Tomando $x_0 = 0.0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.2$, o polinômio interpolador $P_2(x)$ é dado por:

$$P_2(x) = l_0(x) * f(x_0) + l_1(x) * f(x_1) + l_2(x) * f(x_2)$$

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1) * (x - x_2)}{((x_0 - x_1) * (x_0 - x_2))} * (1.979425)$$
$$+ \frac{(x - x_0) * (x - x_2)}{((x_1 - x_0) * (x_1 - x_2))} * (2.4489)$$
$$+ \frac{(x - x_0) * (x - x_1)}{((x_2 - x_0) * (x_2 - x_1))} * 2.24570$$

LOGO, $l_0(0.7) = -0.1666667, l_1(0.7) = 1.0, l_2(0.7) = 0.166667$ e portanto,

$$f(0.7) \approx P_2(0.7) = l_0(0.7) * f(x_0) + l_1(0.7) * f(x_1) + l_2(0.7) * f(x_2) = 2.49318$$

2.[**1.5**] Experimentalmente foram obtidos os valores de uma função $f(x)$ mostrados na tabela a seguir:

x_i	0.0	0.30	0.5	0.8
$f(x_i)$	2.05	3.45	3.2	2.2

Determine a, b, pelo MMQ, de modo que $g(x) = \dfrac{a\,x + b}{5\,x^2 + 1}$ aproxime a função tabelada.

SOLUCAO: Basta tomar $g_0(x) = \dfrac{x}{5\,x^2 + 1}$ e $g_1(x) = \dfrac{1}{5\,x^2 + 1}$ e aplicar o MMQ para obter os valores de a e b.

Sejam $x_0 = 0.0, x_1 = 0.30, x_2 = 0.5, x_3 = 0.8$ e $g_0(x) = \dfrac{x}{5x^2 + 1}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{5x^2 + 1}$.

Pelo MMQ os valores de a e b são obtidos resolvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} (g_0, g_0) & (g_1, g_0) \\ (g_0, g_1) & (g_1, g_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, g_0) \\ (f, g_1) \end{bmatrix}$$

onde

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.3000 \\ 0.22222 \\ 0.190476 \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.68965 \\ 0.44444 \\ 0.23809 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 2.0500 \\ 3.4500 \\ 3.2000 \\ 2.2000 \end{bmatrix},$$

$(g_0, g_0) = 0.17566, (g_0, g_1) = 0.35100,$
$(f, g_0) = 2.165151$
$(g_1, g_1) = 1.72983, (f, g_1) = 6.37529$

Logo, temos o sistema linear: $\begin{bmatrix} (0.17566 & 0.35100 \\ 0.35100 & 1.72983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.16515 \\ 6.37529 \end{bmatrix}$, que tem como solução: $a = 8.34499, b = 1.9922$

3. [**1.0**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1.0	-0.5	0.0	1.0	2.0	2.5	3.0
$f(x_i)$	-5.0	-2.6875	-1.5	-0.9375	-0.5	6.8125	12.5

Sabendo que $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, utilize uma fórmula de Newton-Cotes e determine o valor exato de $\displaystyle\int_{-1.0}^{3.0} f(x)dx$. Justifique a sua resposta [**0.5**].

SOLUÇÃO: Como $f(x)$ é polinômio de grau ≤ 3, tomando os pontos $x_0 = -1.0, x_1 = 1.0, x_2 = 3.0$ e $h = 2$, a fórmula de Simpson 1/3 fornece:
$I_S(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_4) + f(x_2)\Big] = (2/3)\Big[-5.0 + 4.0*(-0.9375) + 12.5\Big] = 2.5000$. O resultado é exato porque a fórmula de Simpson 1/3 tem grau de precisão $r = 3$ (isto é, fornece o valor exato quando $f(x)$ é polinômio de grau ≤ 3).

4. Considere a integral $I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}(1+3x^3+2x^4)\,dx$

a) [**1.0**] Obtenha uma aproximação para $I(f)$ utilizando a fórmula de Gauss-Hermite com $N = 4$.

SOLUCAO: Considere $f(x) = e^{-x^2}(1+3x^3+2x^4)$ então,

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}(1+3x^3+2x^4)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-x^2}(1+3x^3+2x^4)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)\,dx.$$

Utilizando a Tabela na coluna de Gauss-Hermite temos os seguintes pontos e pesos:

x_i	-1.65068	-0.524647	1.65068	0.524647
A_i	0.0813128	0.804914	0.0813128	0.804914
$f(x_i)$	0.154428	0.545459	1.923716	1.203436

Logo,

$$I(f) \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) = 1.57668992343244.$$

b) [**1.0**] Qual é o grau de precisão da fórmula utilizada no item a)? O resultado da aproximação obtida no item a) é exato? Justifique a sua resposta.

SOLUCAO: O grau de precisão da fórmula é $r = 2n+1$, onde $N = n+1$, logo, $n = 3$. Portanto, o grau de precisão é $r = 2*3+1 = 7$. Além disso, temos que a solução fornecida no item a) não é exata, pois $f(x)$ não é uma função polinomial de grau ≤ 7.

5. Sejam $x_0, x_1 \in [-1,\ 1]$ e $I_Q(f) = A_0 * f(x_0) + A_1 * f(x_1)$ uma fórmula de quadratura de Gauss que aproxima $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

i) [**1.0**] Se $P_3(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, forneça condições suficientes sobre x_0, x_1, A_0, A_1 para que tenhamos $I_Q(P_3) = I(P_3)$.

SOLUCAO: Como temos $[-1,\ 1]$ e $w(x) = 1$, basta aplicar o Teorema Quadratura de Gauss e utilizar os polinomios ortogonais de Legendre de grau $N = n+1 = 2$. Os pontos x_0, x_1 são os zeros do polinômio de Legendre de grau 2 e juntamente com A_0, A_1 são obtidos pela tabela de Gauss.

ii) [**1.0**] Forneça os valores de x_0, x_1, A_0, A_1 e calcule $I_Q(2x^3+4)$.

SOLUCAO: Da tabela de Gaus obtemos:
$x_0 = -0.577350, x_1 = -x_0 == 0.577350, A_0 = A_1 = 1.000.$
Nesse caso, $I(2x^3+4) = I_Q(2x^3+4) = A_0 * (x_0^3 + 4 + x_1^3 + 4) = 8.$

6. Considere o PVI de 3a. ordem

$$y''' = xy^2 - 5y',\ x \in\ [1.0,\ 1.2], \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1 \quad y''(1) = 1$$

a) [**1.0**] Obtenha o sistema de EDO de 1a. ordem associado a esse PVI.

SOLUÇÃO: Considerando $y_1(x), y_2(x)$ e $y_3(x)$ tais que,

$$\begin{aligned} y_1 = y \Rightarrow y_1' = y' = y_2, &\quad y_1(1) = y(1) = 1.0 \\ y_2 = y' \Rightarrow y_2' = y'' = y_3, &\quad y_2(1) = y'(1) = 1.0 \\ y_3 = y'' \Rightarrow y_3' = y''' = xy^2 - 5y' = xy_1^2 - 5y_2, &\quad y_3(1) = y''(1) = 1.0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}(x,\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ xy_1^2 - 5y_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x,\mathbf{Y}), & 1 \leq x \leq 1.2, \\ \mathbf{Y}(1) = \mathbf{Y}_0 \end{cases}$$

b) [**1.5**] Use $h = 0.1$ e calcule $y(1.2)$ pelo método de Euler modificado.

SOLUÇÃO: Temos $h = 0.1$, $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$. Pelo método Euler Modificado temos:

$$\mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + \frac{h}{2}\left\{\mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j) + \mathbf{F}(x_{j+1}, \overline{\mathbf{Y}}_{j+1}\right\}, \ \overline{\mathbf{Y}}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + h\mathbf{F}(x_j, \mathbf{Y}_j)$$

Cálculo de $\mathbf{Y}_j$:

i) Cálcular $\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{bmatrix} y_{2,0} = 1 \\ y_{3,0} = 1 \\ x_0\, y_{1,0}^2 - 5y_{2,0} = 1 * 1^2 - 5 * 1 = -4 \end{bmatrix}$

ii) Cálcular $\overline{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{Y}_0 + 0.1 * \mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

iii) Calcular $\mathbf{F}(x_1, \overline{\mathbf{Y}}_1) = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.6 \\ 0.1 * \overline{y}_1{}^2 - 5 * \overline{y}_2 = -4.169 \end{bmatrix}$

iv) Calcular $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_0 + 0.05 * \left\{\mathbf{F}(x_0, \mathbf{Y}_0) + \mathbf{F}(x_1, \overline{\mathbf{Y}}_1)\right\}$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 * \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.6 \\ -4.169 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.08 \\ 0.59155 \end{bmatrix}$$

De maneira analoga, calcula-se $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}(1.2)$.