SME300 Cálculo Numérico - - 2ª Prova
MOSTRAR TODOS OS CÁLCULOS

*****************ASSINALAR AS QUESTÕES RESOLVIDAS****************

*************FAZER CÁLCULOS COM 4 CASAS DECIMAIS******* - 04/12/2019**

Nome: **No. USP:**

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	-0.30	-0.10	0.20	0.6	0.90
$f(x_i)$	0.80442	0.61183	0.44848	0.48050	0.70598

(i) [**1.0**] Calcule o valor aproximado de $f(0.42)$ utilizando o polinômio interpolador em 3 pontos.

SOLUÇÃO:

O polinômio interpolador em 3 pontos é $P_2(x)$. Vamos escolher 3 pontos da tabela: $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.9$. O polinômio interpolador segundo a regra de interpolação de Lagrange é,

$$P_2(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1) + l_2(x)f(x_2),$$

sendo,

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{(0.2-0.6)(0.2-0.9)} = \frac{(x-0.6)(x-0.9)}{0.280000}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.9)}{(0.6-0.2)(0.6-0.9)} = \frac{(x-0.2)(x-0.9)}{-0.120000}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.2)(x-0.6)}{(0.9-0.2)(0.9-0.6)} = \frac{(x-0.2)(x-0.6)}{0.210000}$$

logo,

$$l_0(0.42) = \frac{(0.42-0.6)(0.42-0.9)}{0.280000} = 0.308571$$
$$l_1(0.42) = \frac{(0.42-0.2)(0.42-0.9)}{-0.120000} = 0.880000$$
$$l_2(0.42) = \frac{(0.42-0.2)(0.42-0.6)}{0.210000} = -0.188571$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(0.42) \approxeq P_2(0.42) &= l_0(0.42)f(x_0) + l_1(0.42)f(x_1) + l_2(0.42)f(x_2) \\ &= 0.308571 * f(0.2) + 0.880000 * f(0.6) - 0.188571 * f(0.9) \\ &= 0.308571 * 0.44848 + 0.880000 * 0.48050 - 0.188571 * 0.70598 \\ &= 0.428100. \end{aligned}$$

(ii) [**1.0**] Sabendo que $f(x) = \cos(1+ax) + bx^2$, determine um majorante do erro da aproximação obtida.

SOLUÇÃO:

O erro é majorado pela expressão:

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \frac{\max_{x\in[0.2\ \ 0.9]} |f'''(x)|}{3!}.$$

Calculando as derivadas de $f(x) = \cos(1 + ax) + bx^2$
$f'(x) = -a\sin(1 + ax) + 2bx$
$f''(x) = -a^2\cos(1 + ax) + 2b$
$f'''(x) = a^3\sin(1 + ax) \ \Rightarrow \ \max_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)| = |a^3| \ \Rightarrow \ \max_{x\in[0.2\ \ 0.9]} |f'''(x)| = |a^3|$.

Portanto

$$|f(x) - P_2(x)| \leq |(0.42 - 0.2)(0.42 - 0.6)(0.42 - 0.9)|\frac{|a^3|}{3 * 2 * 1} = 0.019008 * \frac{|a^3|}{6} = 0.006336|a^3|.$$

2. [**1.0**] Sabe-se que a função tabelada abaixo é da forma: $g(x) = \dfrac{0.7}{1 + x^2} + \dfrac{0.8x}{1 + ax^2}$. Determine o valor de a pelo método dos Mínimos Quadrados.

x_i	0.10	0.45	0.70	0.90
$f(x_i)$	0.7500	0.8866	0.7912	0.6248

SOLUÇÃO:

Queremos aproximar $f(x)$ por $g(x) = \dfrac{0.7}{1 + x^2} + \dfrac{0.8x}{1 + ax^2}$.

$$f(x) \approx \frac{0.7}{1 + x^2} + \frac{0.8x}{1 + ax^2} \ \Rightarrow \ \frac{0.8x}{1 + ax^2} \approx f(x) - h(x), \text{ onde } h(x) = \frac{0.7}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \ (1 + ax^2)[f(x) - h(x)] \approx 0.8x \ \Rightarrow \ ax^2 \approx \frac{0.8x}{f(x) - h(x)} - 1$$

Para determinar o coeficiente A é necessário aplicar o MMQ de maneira que a função $F(x) = \dfrac{0.8x}{f(x) - h(x)} - 1$ seja aproximada pela função $G(x) = a\ g_0(x)$, onde $g_0(x) = x^2$.

Note que

x_i	0.10	0.45	0.70	0.90
$f(x_i)$	0.7500	0.8866	0.7912	0.6248
$F(x_i)$	0.405217	0.182346	0.742369	2.024452

Logo, o sistema reultante é fornecido pela seguinte expressão,

$$[\ (g_0, g_0)\ ][\ a\ ] = [\ (F, g_0)\ ]$$

onde

$$g_0 = \begin{bmatrix} 0.0100 \\ 0.2025 \\ 0.4900 \\ 0.8100 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 0.405217 \\ 0.182346 \\ 0.742369 \\ 2.024452 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[\ 0.937306\ ][\ a\ ] = [\ 2.044544\ ] \ \Rightarrow \ a = 2.181298.$$

3. [**2.0**] A função tabelada é um polinômio de grau ≤ 3. Sabendo disso, utilize uma fórmula de Newton-Cotes e calcule exatamente o valor de $I(f) = \int_1^3 f(x)dx$.

x_i	1.0	1.50	2.00	2.50	3.0
$f(x_i)$	3.3500	4.7063	6.4000	8.5436	11.2500

SOLUÇÃO:

Como $f(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, tomando os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, a fórmula de Simpson 1/3 fornece:

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{1}{3}[3.3500 + 4 * 6.4000 + 11.2500] = 13.4000.$$

O resultado é exato porque a fórmula de Simpson 1/3 tem grau de precisão $r = 3$ (isto é, fornece o valor exato quando $f(x)$ é polinômio de grau ≤ 3).

4. Deseja-se aproximar $I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ pela fórmula de quadratura $I_Q(f) = A * [f(x_0) + f(-x_0)]$, onde $x_0 \in [-2,\ 2]$ e A é um número real.

(i) [**1.5**] Suponha que o grau de precisão de $I_Q(f)$ é $r \geq 2$ e determine A e x_0.

SOLUÇÃO:

Pelo método dos coeficientes indeterminados, para que $I_Q(f)$ tenha grau de precisão $r \geq 2$ é suficiente que
$I_Q(1) = I(1) = \int_{-2}^{2} 1\ dx = 4$ como $I_Q(1) = A * [1 + 1] = 2A \ \Rightarrow\ 2A = 4$
$I_Q(x) = I(x) = \int_{-2}^{2} x\ dx = 0$ como $I_Q(x) = A * [x_0 + (-x_0)] = 0 \ \Rightarrow\ 0 = 0$
$I_Q(x^2) = I(x^2) = \int_{-2}^{2} x^2\ dx = 16/3$ como $I_Q(x^2) = A * [x_0^2 + (-x_0)^2] = 2Ax_0^2 \ \Rightarrow\ 2Ax_0^2 = 16/3$
Resolvendo esse sistema, obtém-se: $A = 2$ e $x_0 = \pm\ \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\ 1.154700$.

(ii) [**0.5**] Prove que $I_Q(P_3) = I(P_3)$ onde $P_3(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3.

SOLUÇÃO:

Para que $I_Q(P_3) = I(P_3)$ onde $P_3(x)$ é um polinômio de grau ≤ 3, basta mostrar que grau de precisão de $I_Q(f)$ é $r \geq 3$. Observamos que a fórmula de quadratura utilizada no item anterior cumpre $I_Q(1) = I(1)$, $I_Q(x) = I(x)$, $I_Q(x^2) = I(x^2)$. Além disso, temos $I_Q(x^3) = A*[x_0^3 + (-x_0)^3] = A\big(x_0^3 - x_0^3\big) = 0$ e $I(x^3) = (x^4)_{-1}^{1} = 0$. Portanto o grau de precisão de $I_Q(P_3)$ é $r \geq n = 3$.

5. Considere a integral $I(f) = \int_1^3 (x^2 + \ln(1+x))dx$.

(a) [**1.0**] Utilizando a fórmula de quadratura Gauss-Legendre com $N = 3$ pontos ($I_L^3(f)$), obtenha o valor de $I(f)$.

SOLUÇÃO:

Como o intervalo de integração não é $[-1, 1]$ vamos introduzir uma mudança de variáveis: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t = \frac{4}{2} + \frac{2}{2}t = 2 + t$ de maneira que $x \in [1, 3] \ \Rightarrow\ t \in [-1, 1]$ e

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\ dt = \int_{-1}^{1} f(2+t)\ dt.$$

A fórmula de Gauss-Legendre com $N = 3$ pontos é dada por:

$$I_L^3(f) = A_0 * f(2 + x_0) + A_1 * f(2 + x_1) + A_2 * f(2 + x_2),$$

onde x_0, x_1 e x_2 são os zeros do polinômio de Legendre de grau 3. Da tabela obtemos os valores dos zeros e dos coeficientes A_0, A_1 e A_2:

x_i	-0.7745966692	0	0.7745966692
A_i	0.5555555556	0.8888888889	0.5555555556

Como $f(x) = x^2 + \ln(1+x)$ então: $f(2+x_0) = f(1.225403) = 2.301550$, $f(2+x_1) = f(2) = 5.098612$ e $f(2+x_2) = f(2.774596) = 9.026676$. Portanto

$$I(f) \approx A_0 * f(2+x_0) + A_1 * f(2+x_1) + A_2 * f(2+x_2)$$

$I(f) \approx 0.5555555556*2.301550+0.8888888889*5.098612+0.5555555556*9.026676 = 10.825558.$

(b) [**1.0**] Calcule $I(f)$ pelo método de Simpson 1/3 com $N = 6$ $(I_S^6(f))$.

SOLUÇÃO: Primeiro, $h = (3-1)/6 = 0.33333$ e montamos a tabela com o valor de $f(x)$ nos pontos:

x_i	1.0	1.33333	1.66667	2.00000	2.33333	2.66667	3.00000
$f(x_i)$	1.693147	2.62507	3.75860	5.09861	6.64841	8.41039	10.38629

Logo, $I_S^6(f) = \dfrac{0.33333}{3}\Big\{1.693147+10.38629+4*\big(2.62507+5.09861+8.41039\big)+2\big(3.75860+6.64841\big)\Big\} = 10.825526.$

(c) [**0.5**] Qual dos valores $I_L^3(f)$ ou $I_S^6(f)$ é o mais preciso?

SOLUÇÃO:

Note que

$$\int_1^3 (x^2 + \ln(1+x))dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 \ln(1+x)dx = 26/3 + \int_1^3 \ln(1+x)dx.$$

Para resolver a integral $\int_1^3 \ln(1+x)\, dx$ vamos substituir $y = x+1$ e $dy = dx$, donde

$$\int_1^3 \ln(1+x)\, dx = \int_2^4 \ln(y)\, dy.$$

Integrando por partes considerando $u = \ln(y)$, $du = \frac{1}{y}dy$, $dv = dy$ e $v = y$ temos:

$$\int_2^4 \ln(y)\, dy = y\ln(y)\,\Big|_2^4 - \int_2^4 1\, dy = 4\ln(4) - 2\ln(2) - y\Big|_2^4 = \ln(64) - 2 = 2.158883$$

$$\Rightarrow \int_1^3 (x^2 + \ln(1+x))dx = 26/3 + 2.158883 = 10.825549.$$

Calculando os erros obtemos: $|I(f) - I_L^3(f)| = |10.825549 - 10.825558| = 0.000009$ e $|I(f) - I_S^6(f)| = |10.825549 - 10.825526| = 0.000023$. Portanto, podemos concluir que $I_L^3(f) = 10.825558$ é mais preciso que $I_S^6(f) = 10.825526$ (desde que $I_L^3(f)$ forneceu o menor erro.).

6. [1.5] Considere o PVI: $\begin{cases} y' = y(1+x^2)\ , & x \in [0.0, 0.6] \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$. Tome $h = 0.2$ e obtenha $y(0.4)$ pelo método de Euler Modificado.

SOLUÇÃO:

Como $h = 0.2$ tem-se: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$ e $x_3 = 0.6$. O método de Euler modificado fornece as equações:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{j+1} = & \ y_j + h * f(x_j, y_j) \\ y_{j+1} = & \ y_j + \frac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \bar{y}_{j+1})]. \end{aligned}$$

- $j = 0$: Cálculo de y_1, considerando $h = 0.2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $x_1 = 0.2$
  $f(x_0, y_0) = y_0(1 + x_0^2) = 1$
  $\bar{y}_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0) = 1 + 0.2 * 1 = 1.2$
  $f(x_1, \bar{y}_1) = \bar{y}_1(1 + x_1^2) = 1.2(1 + 0.04) = 1.2480$
  $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1)] = 1 + \frac{0.2}{2}[1 + 1.2480] = 1.2248$
- $j = 1$: Cálculo de y_2, considerando $h = 0.2$, $x_1 = 0.2$, $y_1 = 1.2248$ e $x_2 = 0.4$
  $f(x_1, y_1) = y_1(1 + x_1^2) = 1.2248(1 + 0.04) = 1.273792$
  $\bar{y}_2 = y_1 + h * f(x_1, y_1) = 1.2248 + 0.2 * 1.273792 = 1.479558$
  $f(x_2, \bar{y}_2) = \bar{y}_2(1 + x_2^2) = 1.479558(1 + 0.16) = 1.716287$
  $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, \bar{y}_2)] = 1.2248 + \frac{0.2}{2}[1.273792 + 1.716287] = 1.523808$

Portanto $y(0.4) = y_2 = 1.523807$.