

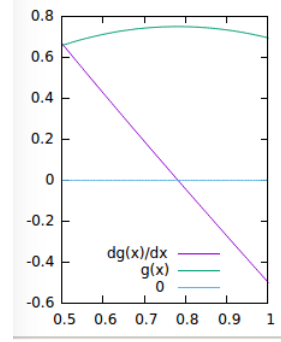
1. Considere a equação:

$$f(x) = \ln(1+x) - x^2 = 0 \quad (1),$$

a qual tem uma raiz $z \in [0.5, 1]$.

Pretende-se calcular essa raiz pelo método do ponto fixo com função iteradora da forma:

$$g(x) = x - x^2 + \ln(1+x)$$



(a)

Figura 1: Gráficos de $g(x)$ e $g'(x)$.

- a) [0.5] Verifique que $g(x)$ tem um ponto fixo em $I = [0.5, 1]$ e que o ponto fixo de $g(x)$ é zero de $f(x)$.

Solução: Para que $g(x)$ tenha ponto fixo, basta mostrar que $h(x) = g(x) - x$ muda de sinal em $[0.5, 1]$. Temos que:

$g(0.5) = 0.5 - (0.5)^2 + \ln(1+0.5) = 0.6554$ e $g(1.0) = 1.0 - (1.0)^2 + \ln(1+1.0) = 0.74821$. e assim, $h(0.5) = g(0.5) - 0.5 = 0.1554$ e $h(1.0) = g(1.0) - 1.0 = -0.3068$. Logo, $h(0.5) * h(1.0) < 0$ e portanto $g(x)$ tem ponto fixo em $[0.5, 1]$.

Desde que $g(x) = x + f(x)$ e se z for ponto fixo de $g(x)$ então temos:

$$g(z) = z + f(z) = z \implies f(z) = 0 \implies z \text{ é raiz de } f(x).$$

- b) [1.5] Mostre que o método do ponto fixo associado a g converge para z , qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0.5, 1]$. Tome $x_0 = 0.7$ e calcule x_5 e uma aprox. para o erro $|z - x_5|$.

Solução: Precisamos mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições:

$$i) g(I) \subset I, \quad I = [0.5, 1] \\ \max |g'(x)| \leq L < 1, x \in I.$$

De fato, temos que

$$g'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{1+x} \quad (I) \\ g'(0.5) = 1 - 2 * (0.5) + \frac{1}{1+0.5} = 0.6666 \\ g'(1.0) = 1 - 2 * (1.0) + \frac{1}{1+1.0} = -0.5000$$

$$g''(x) = -2 - \left(\frac{1}{1+x} \right)^2 \quad (II)$$

Para $x \in [0.5, 1]$, a Eq. (II) mostra que $g''(x) < 0$ e portanto $g'(x)$ é monótona decrescente em $[0.5, 1]$. Assim, temos: $g'(0.5) \geq g'(x) \leq g'(1.0) \implies 0.6666 \geq g'(x) \leq -0.5000$. Portanto, $\max |g'(x)| \leq L = 0.6666$.

Para provarmos que $g(I) \subset I$, procedemos como segue: Como $g'(x)$ muda de sinal (veja Fig. 1), precisamos dividir o intervalo I em dois subintervalos, digamos I_1 que tem $g'(x) \geq 0$ e I_2 onde $g'(x) \leq 0$ e mostrar que o valor de $g(x)$ nesses intervalos está em I .

Calculando o zero de $g'(x)$ obtemos:

$$1 - 2x + \frac{1}{1+x} = 0 \implies (1+x) - 2x(1+x) + 1 = 0 \implies -2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\implies x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-4} \implies z_1 = 0.78077 \in I, \text{ e } z_2 = -1.28077.$$

Logo, $I_1 = [0.5, 0.78077]$ e $I_2 = [0.78077, 1]$ e $g(0.78077) = 0.74821 \in I$. Assim, temos:

Se $x \in I_1 \implies g'(x) \geq 0$ (veja Fig. 1.) $\implies g(x)$ é monótona crescente em I_1
 $\implies g(0.5) = 0.6554 \leq g(x) \leq 0.74821 \implies g(I_1) \subset [0.5, 1]$.

Se $x \in I_2 \implies g'(x) \leq 0$ (veja Fig. 1.) $\implies g(x)$ é monótona decrescente em I_2
 $\implies g(0.78077) = 0.74821 \geq g(x) \geq g(1) = 0.69314$
 $\implies g(I_2) \subset [0.74821, 0.69314] \subset [0.5, 1]$.

Portanto, dado $x_0 \in [0.5, 1]$, a sequência $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para o único ponto fixo, z , em $[0.5, 1]$.

Tomando $x_0 = 0.7$, obtemos as aproximações:

$$\begin{aligned} x_0 = 0.7 &\longrightarrow x_1 = g(x_0) = 0.7406283 \\ x_1 = 0.7406283 &\longrightarrow x_2 = g(x_1) = 0.7463442 \\ x_2 = 0.7463442 &\longrightarrow x_3 = g(x_2) = 0.7468391 \\ x_3 = 0.746839 &\longrightarrow x_4 = g(x_3) = 0.7468784 \\ x_4 = 0.7468784 &\longrightarrow x_5 = g(x_4) = 0.7468815 \\ x_5 &= 0.7468815 \end{aligned}$$

- c) **[0.5]** Determine a ordem de convergência do método e o fator assintótico de convergência K_∞

Solução: $|g'(z)| \approx |g'(x_5)| = 0.0786857 \neq 0 \Rightarrow$ ordem de convergência é $p = 1$ (CONV. LINEAR).

$$k_\infty \approx |g'(x_5)| = 0.0786857.$$

2. **[1.0]** Mostre que o método de Newton aplicado à Eq. (1) converge para a raiz z qualquer que seja a aprox. inicial $x_0 \in [0.5, 1]$. Use $x_0 = 0.7$ e calcule aproximações x_{n+1} até que $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ **[0.5]**.

Solução: Temos que mostrar que $f(x) = \ln(1+x) - x^2$ satisfaz as condições abaixo:

i) $f(0.5)f(1) < 0$ - condição válida

$$f(0.5) = 0.15546 \text{ e } f(1) = -0.30685$$

ii) $f'(x)$ não muda de sinal em $[0.5, 1]$ - condição válida

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{1+x} \text{ é monótona decrescente } \Rightarrow f'(0.5) = -0.3333 \geq f'(x) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in [0.5, 1]$$

iii) $f''(x) \geq 0$ ou $f''(x) \leq 0$ - condição válida

$$f''(x) = -2 - \frac{1}{(1+x)^2} < 0, \forall x \in [0.5, 1]$$

$$\text{iv) } \left| \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \right| = \left| \frac{0.15546}{-0.3333} \right| = 0.4663 < 0.5$$

$$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \left| \frac{-0.3068}{-1.5} \right| = 0.2045 < 0.5$$

Como as condições i) a iv) são satisfeitas, o método de Newton aplicado a equação $f(x) = 0$ converge para a raiz em $[0.5, 1]$, $\forall x_0 \in [0.5, 1]$.

Tomando $x_0 = 0.7$, obtemos as aproximações:

$$x_0 = 0.7 \Rightarrow x_1 = 0.7 - \frac{\ln(1 + 0.7) - 0.7^2}{-2 * 0.7 + 1/(1 + 0.7)} = 0.7500493$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\ln(1 + x_1) - x_1^2}{-2 * x_1 + 1/(1 + x_1)} = 0.7468943, \quad x_3 = x_4 = 0.7468817.$$

3. Seja a matriz A abaixo. Utilize o método LU e calcule a 3a. coluna da matriz A^{-1} .

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 1.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 1.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Da equação $AA^{-1} = I$, a terceira coluna de A^{-1} é obtida resolvendo o sistema linear $AX = \mathbf{e}_3$ onde $\mathbf{X}$ representa a 3a. coluna de A^{-1} e $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

Pelo método LU, a solução do sistema linear $AX = \mathbf{e}_3$ é obtida calculando as matrizes L, U e resolve-se os sistemas lineares triangulares: $Ly = \mathbf{e}_3$ e $Ux = y$.

Cálculo de L e U : As fórmulas para calcular as matrizes L e U são :

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj} \quad l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk})/u_{kk}$$

Utilizando essas fórmulas, calculando linha k de U seguido do cálculo da coluna k de L , obtém-se as matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.214285 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2121212 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.4 & 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.414286 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.393934 \end{bmatrix}$$

e assim,

$$L \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.214285 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2121212 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ -0.2121212 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.4 & 0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.414286 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.393934 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ -0.2121212 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.1811594 \\ -0.2173913 \\ 0.7608696 \\ -0.1521745 \end{bmatrix}$$

4. [1.5] Considere o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ onde a matriz de iteração é dada por

$$C = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.6 \\ 0.2 & -0.3 & -0.2 \end{bmatrix}. \text{Esse método é convergente? justifique sua resposta.}$$

Solução: Basta mostrar que $\|C\| < 1$. De fato,

$$\|C\|_1 = \max \{0.7, 0.9, 0.9\} = 0.9 < 1 \implies \text{o método converge.}$$

5. [1.5] O sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + 4x_3 &= 1 \end{cases} \quad \text{O método de Jacobi aplicado a esse sistema converge?}$$

Solução: Com A não é de diagonal estritamente dominante, precisamos verificar se $\|C_J\| < 1$, $\rho(C_J) < 1$.

$$C_J = -D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0.0 \\ -0.75 & 0.0 & 0.25 \\ 0.0 & 0.25 & -0.0 \end{bmatrix}, \quad \text{Logo, } \|C_J\|_1 = \|C_J\|_\infty = 1. \text{ Calculando } \rho(C_J) \text{ vem:}$$

$$\det[C_J - \lambda I] = 0 \implies \begin{vmatrix} -\lambda & -0.75 & 0.0 \\ -0.75 & -\lambda & 0.25 \\ 0.0 & 0.25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{10}{16} \right) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{10}}{4} = -0.7906, \lambda_3 = \frac{\sqrt{10}}{4} = 0.7906.$$

6. Pretende-se aplicar o método de Newton para aproximar a solução sistema de equações não-lineares solução do sistema não-linear

- a) [1.0] Partindo do vetor $\mathbf{x}^{(0)} = [2.0 \ 0.50]^T$ como aproximação inicial, escreva o sistema linear para calcular a primeira iteração $\mathbf{x}^{(1)}$.
b) [1.0] Calcule as aproximações $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ pelo método de Newton. Resolva os sistemas lineares utilizando o método de Elim. de Gauss.
c) [0.5] O método está convergindo? Justifique a sua resposta.

Solução: Temos que:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ f_2 = x_1 x_2 - 1 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 0.5 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cálculo} \\ \text{de } \mathbf{x}^{(1)} : \end{array} \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 0.5 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.03125 \end{bmatrix} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = -0.0666667 \\ d_2 = 0.0166667 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + d_1 = 2.0 - 0.0666667 = 1.933333 \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + d_2 = 0.5 + 0.0166667 = 0.5166667 \end{array},$$

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -0.0047221 \\ 0.0011111 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3.8666666 & 1.0333333 \\ 0.5166667 & 1.9333333 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{x}^{(2)}$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} = 1.9318527 \\ x_2^{(2)} = 0.5176371 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0.0000030 \\ -0.0000014 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})\|_{\infty} = 0.250 \\ \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\|_{\infty} = 0.004721 \\ \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})\|_{\infty} = 0.0000030 \end{array}$$

Como $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})\|_{\infty} = 0.250 > \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\|_{\infty} = 0.004721 > \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})\|_{\infty} = 0.0000030$, vemos que o método está convergindo desde que na solução $\mathbf{x}$ teremos $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_{\infty} = 0.0$.