1ª Lista de Exercícios - EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

1. Dadas as funções:

1.1) $xe^x - 4 = 0$

1.2) $\ln(x) - x + 2 = 0$

pesquisar a existência de raízes e isolá-las em intervalos.

2. A equação $x^2 + 5x - 1 = 0$ tem uma raiz no intervalo $[0, 0.5]$. Verifique quais dos processos abaixo podem ser usados, com sucesso, para obtê-la:

2.1) $x_{k+1} = \frac{1-x_k^2}{5}$

2.2) $x_{k+1} = \frac{1-5x_k}{x_k}$

2.3) $x_{k+1} = \sqrt{1 - 5x_k}$.

3. A equação $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tem três raízes. Um método iterativo pode ser definido usando a separação óbvia da equação:

$$x = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}$$

3.1) Verificar que começando com $x_0 = 0$ haverá convergência para a raiz próxima de -0.5 , se o valor negativo for usado e que haverá convergência para a raiz próxima de 1.0 , se o valor positivo for usado.

3.2) Mostrar que a forma acima não converge para a terceira raiz próxima de 4.0 , qualquer que seja a aproximação inicial próxima da raiz.

4. A fórmula $x_{n+1} = 2x_n - Ax_n^2$ é candidata para se determinar o inverso de um número A ; $\frac{1}{A}$. Mostre que se a fórmula converge, então converge para $\frac{1}{A}$ e determine os limites da estimativa inicial x_0 para convergir. Teste suas conclusões nos casos:

4.1) $A = 9$ e $x_0 = 0.1$

4.2) $A = 9$ e $x_0 = 1.0$.

5. Mostre que $x^3 - 2x - 17 = 0$ tem apenas uma raiz real e determine seu valor correto até 5 casas decimais usando o método de Newton.

6. Mostre que a fórmula para determinar raiz cúbica de um número real Q ,

$$x_{k+1} = \frac{1}{3} \left(2x_k + \frac{Q}{x_k^2} \right), k = 0, 1, \dots$$

é um caso especial de iteração de Newton.

7. Aplique o método iterativo definido no exercício 6 para determinar a raiz cúbica de 2 com precisão de 10^{-5} . Obtenha o valor inicial, x_0 graficamente.

8. A equação $x^3 - 2x - 1 = 0$ possui apenas uma raiz positiva.

8.1) Se desejássemos também pesquisar as raízes negativas usando intervalos de amplitude $\frac{1}{2}$, até o ponto -2 , em que intervalos seriam encontradas tais raízes?

8.2) Obtenha a menor raiz negativa (em módulo), usando o método de Newton. Trabalhe com arredondamento para 6 casas decimais.

9. Usando o método de Newton determine, sem efetuar a divisão, o valor numérico de $x = \frac{1}{3}$ com 5 casas decimais corretas, iniciando com $x_0 = 0.3$.

10. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3} \ln(x^2 + 1)$$

a) Prove que a sucessão definida por

$$x_{m+1} = \frac{1}{3} \ln(x_m^2 + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

converge para um número $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência.

b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 5$, e calcule os quocientes

$$\frac{|e_1|}{(e_0)^2}, \quad \frac{|e_2|}{(e_1)^2}, \quad \frac{|e_3|}{(e_2)^2}, \dots$$

Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior ?

11. Considere os seguintes métodos para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) método de Newton aplicado a função $f(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4^*$ então o método de Newton converge e a ordem é dois. Calcule três iteradas e determine um majorante para o erro de x_3 . Quantos algarismos significativos pode garantir ? (* Note que pode concluir convergência se escolher para x_0 qualquer valor ≥ 4)

b) método de Newton aplicado à função $f(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

***** EXERCÍCIOS DE PROVAS ANTERIORES *****

1. Considere a equação : $f(x) = x^2 - \cos^2(x) = 0$ (I).

- a) [0.5] Mostre que essa equação tem 2 raízes reais: $z_1 < z_2$, onde $z_1 \in [-1, 0]$ e $z_2 \in [1, 0]$.
- b) Para resolver numericamente a equação (I) é proposto utilizar o método de ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$, com função de iteração $g(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + x)$. Mostre como se obteve essa equação.
- i) Prove que o método de ponto fixo associado a $g(x)$ converge para a raiz z pertencente ao intervalo $[0, 1]$, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida nesse intervalo.
- ii) [0.5] Utilizando $x_0 = 1$ calcule uma aproximação x_{n+1} , parando quando $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$. Indique ainda uma estimativa do erro $|z - x_{n+1}|$. (0.5 ponto)
- iii) [1.5] Mostre que o método iterativo do ponto fixo associado a g (eq. (II)) converge para a raiz z_2 qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.
- iii) [0.5] Determine a ordem de convergência do método e uma aproximação da constante K_∞ . (1.0 ponto)

2. Considere a sequência gerada por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{1+x_n}}, \quad n \geq 0$$

- a) [2.0] Utilizando o teorema do ponto fixo, mostre que essa sucessão converge para $z \in [0, 5]$ qualquer que seja o valor de $x_0 \in [0, 5]$.
- b) [1.0] Considere a equação

$$4x^3 + 4x^2 - \alpha = 0$$

Determine o valor de α de modo a que o limite, z , da sequência considerada na alínea anterior seja uma das raízes desta equação.

- c) [1.5] Mostre que o método de Newton aplicado à equação obtida na alínea 1.b) converge para a raiz z , qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0.1, 5]$.