Grafos
Introdução

SCC 503 - Alg. Estrut. Dados II - BSI

- Introdução e Problemas
- Digrafos
  - Como especificar um digrafo?
- Grafos
  - Tipos de Grafos
- Definições
- Propriedades
- Problema das Pontes de Konigsberg

Itens e Relacionamentos

- Muitas aplicações tem uma natureza que envolve não apenas um conjunto de itens, mas também um conjunto de conexões entre pares e itens.
- Os itens passam a ter uma relação estabelecida pelas conexões.
- Já viram alguma estrutura de dados que permita modelar itens e relacionamento entre eles?
  - Árvores provêem apenas uma forma de modelar relacionamento **hierárquico** .
- Grafos
  - São objetos abstratos que modelam itens e a relação entre eles.
  - Teoria dos Grafos é uma grande área de matemática combinatória e envolve uma série de resultados importantes obtidos principalmente a partir do século XVII.

Alguns Problemas

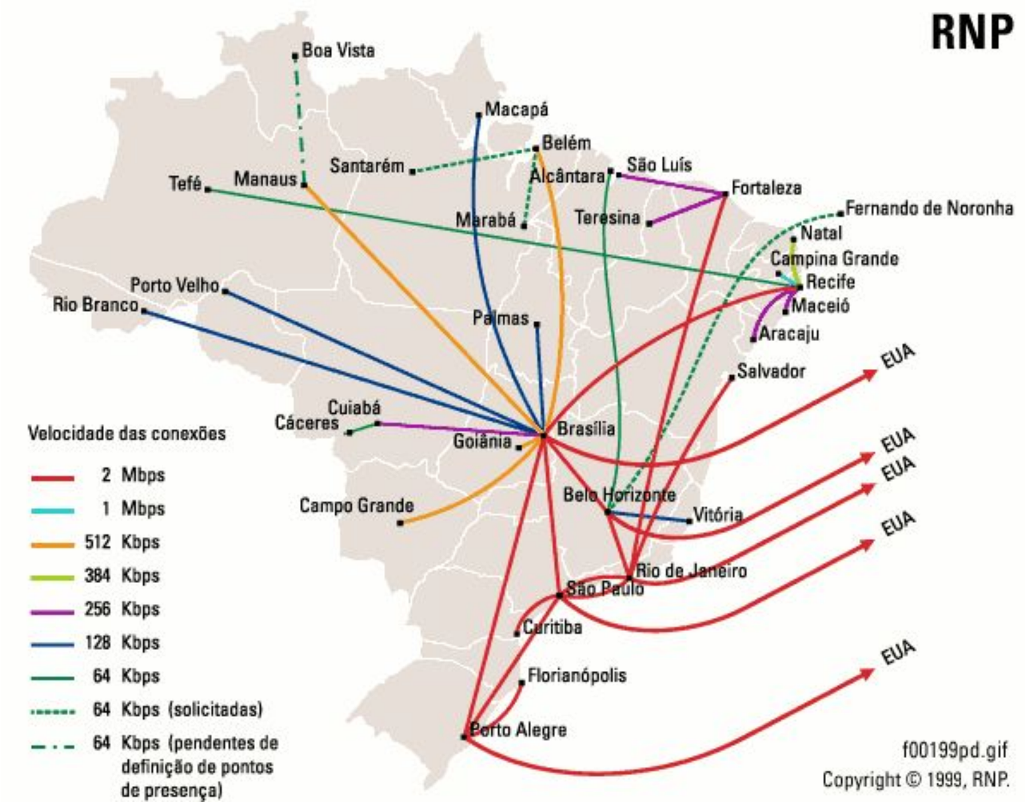
- Mapas
  - Uma pessoa que sai em uma viagem geralmente quer saber qual o caminho mais curto ou qual o caminho mais barato para ir de uma cidade a outra.
  - Essas questões podem ser respondidas processando informações sobre conexões (estradas e ruas) entre itens (cidades).
- Hipertextos
  - Quando surfamos na Web, documentos fazem referências a outros documentos por meio de links .
  - A Web é um grafo, onde os itens são documentos e as conexões são os links . Algoritmos baseados em grafos são essenciais para motores de busca, por exemplo.
  - https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank (o famoso algoritmo de busca do Google)

Alguns Problemas

- Estrutura de um programa
  - um compilador monta grafos para representar a estrutura de um sistema grande
  - Os itens são as várias funções e módulos que compõem o sistema e as conexões estão associadas por exemplo com a possibilidade de uma função chamar outra função.
- Redes Sociais
  - Há diversas redes sociais: familiares, de trabalho, de amizades que podem ser modeladas por um grafo.
  - As pessoas são os items e o relacionamento entre duas pessoas representada por uma conexão.

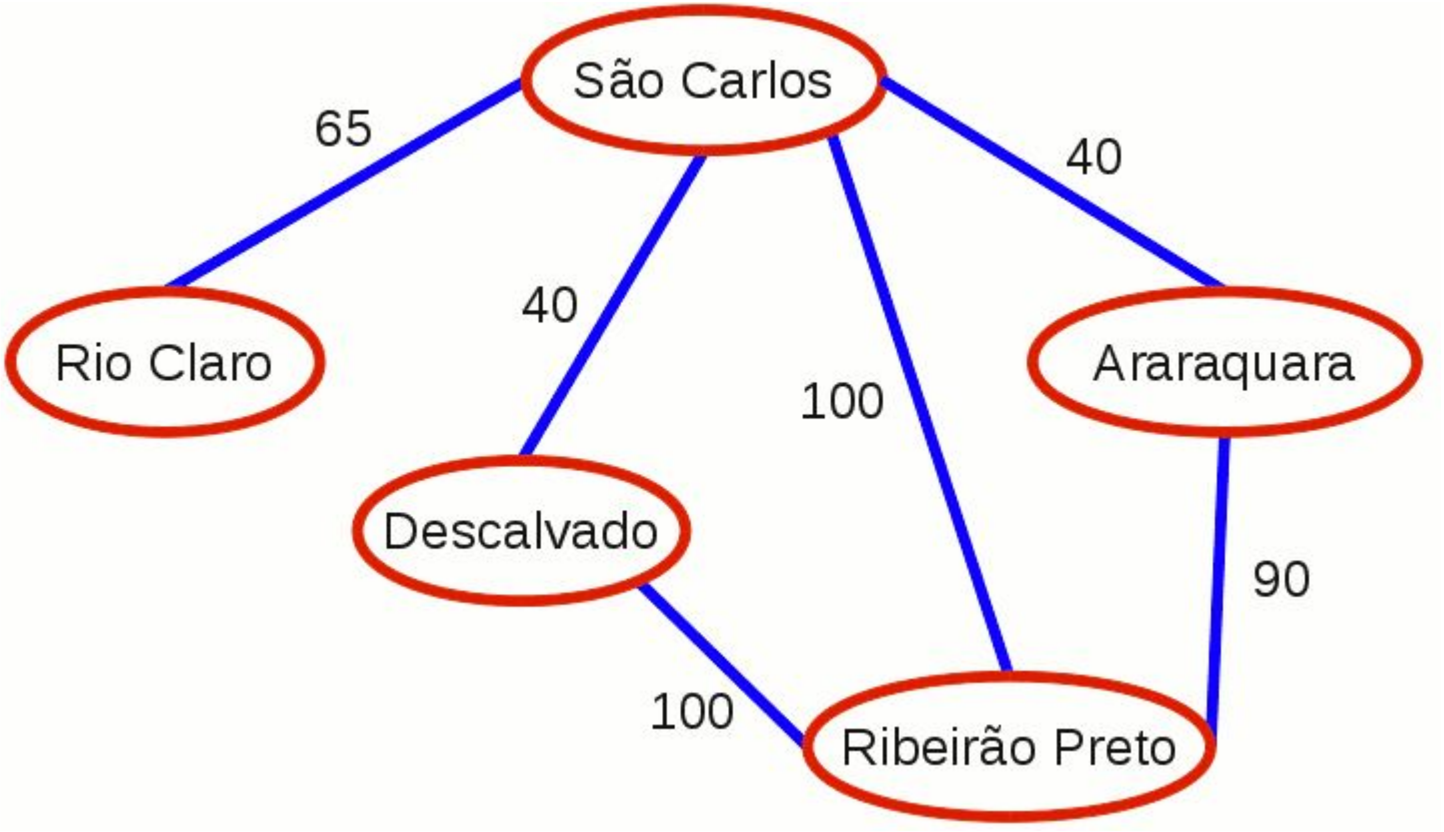
Aplicações

Redes



Aplicações

Estradas

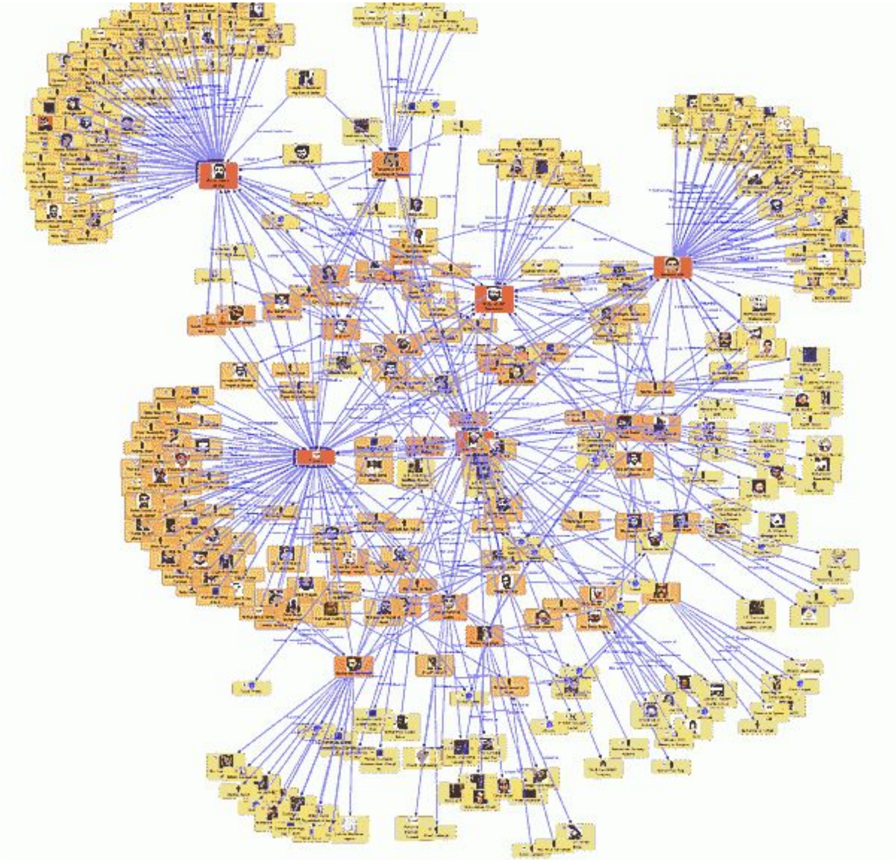


Aplicações

Vôos

Aplicações

Redes Sociais
Small world network

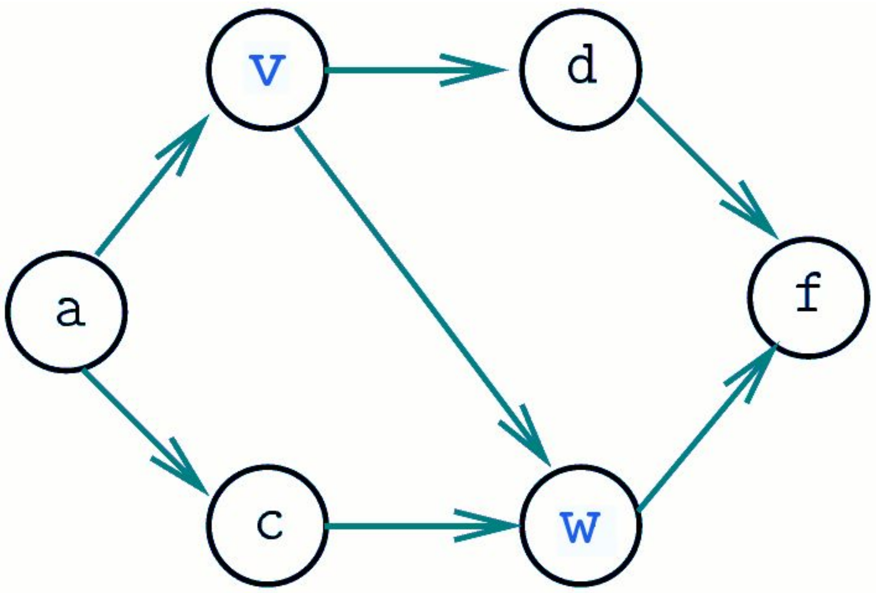


https://en.wikipedia.org/wiki/Small-world_network

- Introdução e Problemas
- **Digrafos**
  - **Como especificar um digrafo?**
- Grafos
  - Tipos de Grafos
- Definições
- Propriedades
- Problema das Pontes de Konigsberg

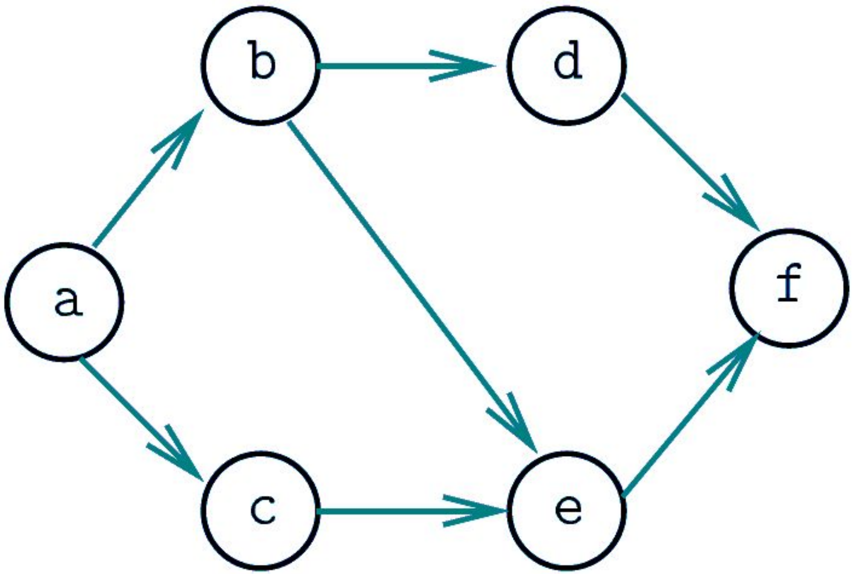
Arcos e Vértices

- Um arco , é um par ordenado de vértices
- Exemplo: v e w são vérticies e v-w é um arco



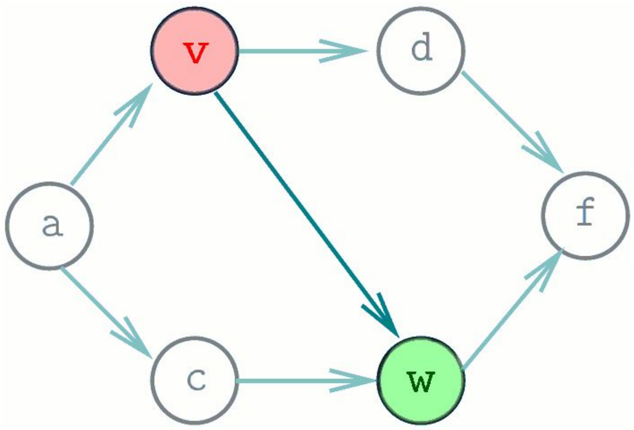
Digrafo

- Directed graph , ou **digrafo** é um conjunto de **vértices** (bolas) e um conjunto de **arcos** (flechas)



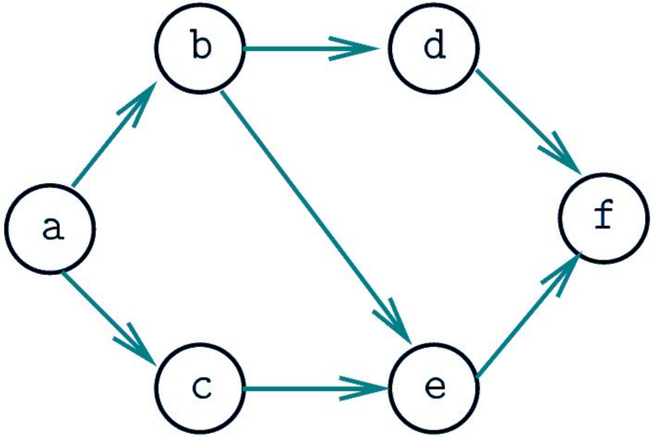
Examinando um arco

- O primeiro vértice do par ordenado é a ponta inicial do arco, e o segundo a ponta final.
- A presença de um arco v-w é independente da existência de w-v .
- Dizemos que o vértice w é **vizinho** de um vértice v, que w é **adjacente** a v ou ainda que v **domina** w.



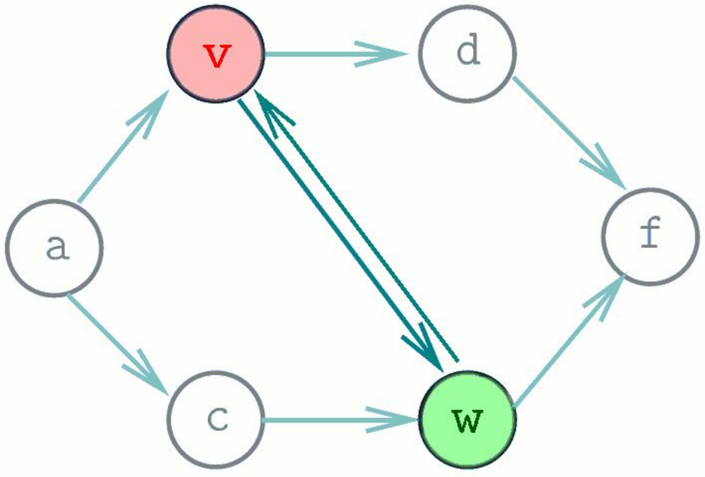
Graus

- Grau de entrada :
  - de um vértice v é o núemro de arcos com ponta final v.
- Grau de saída :
  - de um vértice v é o número de arcos com ponta inicial v
- No exemplo abaixo, b tem grau de entrada 1 e grau de saída 2.



Digrafo Simétrico

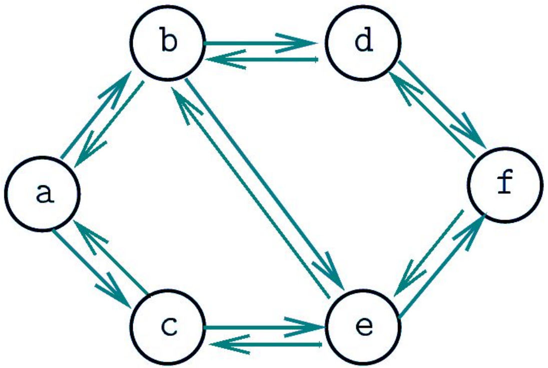
- Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro.
- Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é a ponta final do outro.
- Os arcos v-w e w-v são anti-paralelos.



- Introdução e Problemas
- Digrafos
    - Como especificar um digrafo?
- **Grafos**
    - **Tipos de Grafos**
- Definições
- Propriedades
- Problema das Pontes de Konigsberg

Grafos

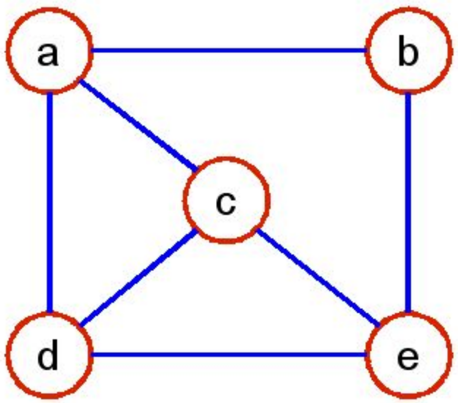
- Um **grafo** (graph) é um tipo especial de digrafo: grafo não dirigido, grafo não orientado
- Um **grafo** é um digrafo simétrico !



- Um par de arcos anti-paralelos é uma **aresta** (edge)
- Não há ponta final ou inicial. Portanto, uma aresta v-w = w-v

Grafo - Definição

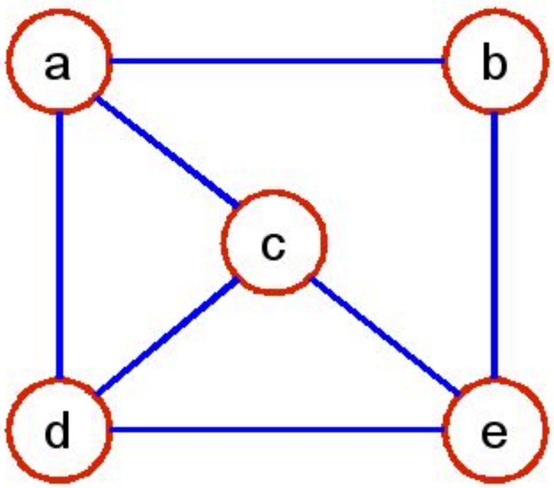
- Um grafo G = (V,E) é composto por:
    - V: conjunto de **vértices**
    - E: conjunto de **arestas**
- Se α = {v,w} é uma aresta de um grafo, dizemos que α **liga** os vértices v e w, ou que **incide** em v (e em w)



V = {a,b,c,d,e}
E = {(a,b), (a,c), (a,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e)}

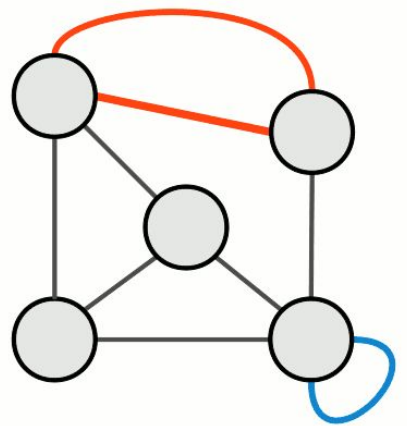
Adjacência e Grau

- Vértices adjacentes :vértices conectados por uma aresta.
  - as arestas são incidentes em um vértice.
- Grau de um vértice: número de arestas incidentes.



Grafos: laços e arestas múltiplas

- Um **laço** (*loop*) é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. No exemplo abaixo temos um laço na cor azul.
- **Arestas múltiplas** ocorrem quando existe a possibilidade de mais de uma aresta conectar o mesmo par de vértices. Abaixo um exemplo de arestas múltiplas em vermelho.

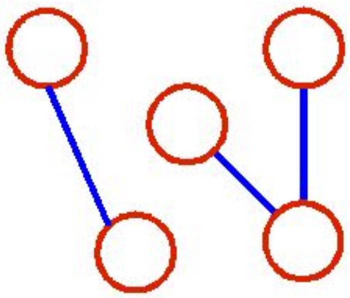


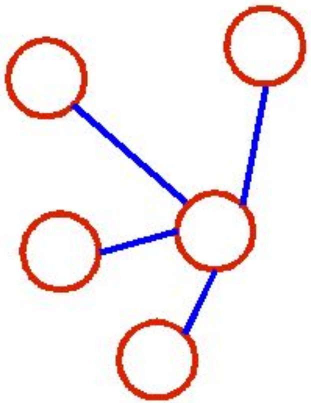
Tipos de Grafos

- Sejam
  - V (G) o conjunto de vértices, em G , de tamanho n, e
  - E (G) o conjunto de arestas, em G , de tamanho m.
- Alguns tipos possíveis de grafos são:
  - Simples: grafos sem laços nem arestas múltiplas
  - Vazio: um grafo G é vazio se V(G) = E(G) = ∅
  - Trivial: um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta
  - Completo: um grafo simples em que qualquer does de seus vértices distintos são adjacentes. Existe um único grafo completo com n vértices, denotado K_n. O grafo K_3 é também chamado de triângulo !

Grafo acíclico e árvores

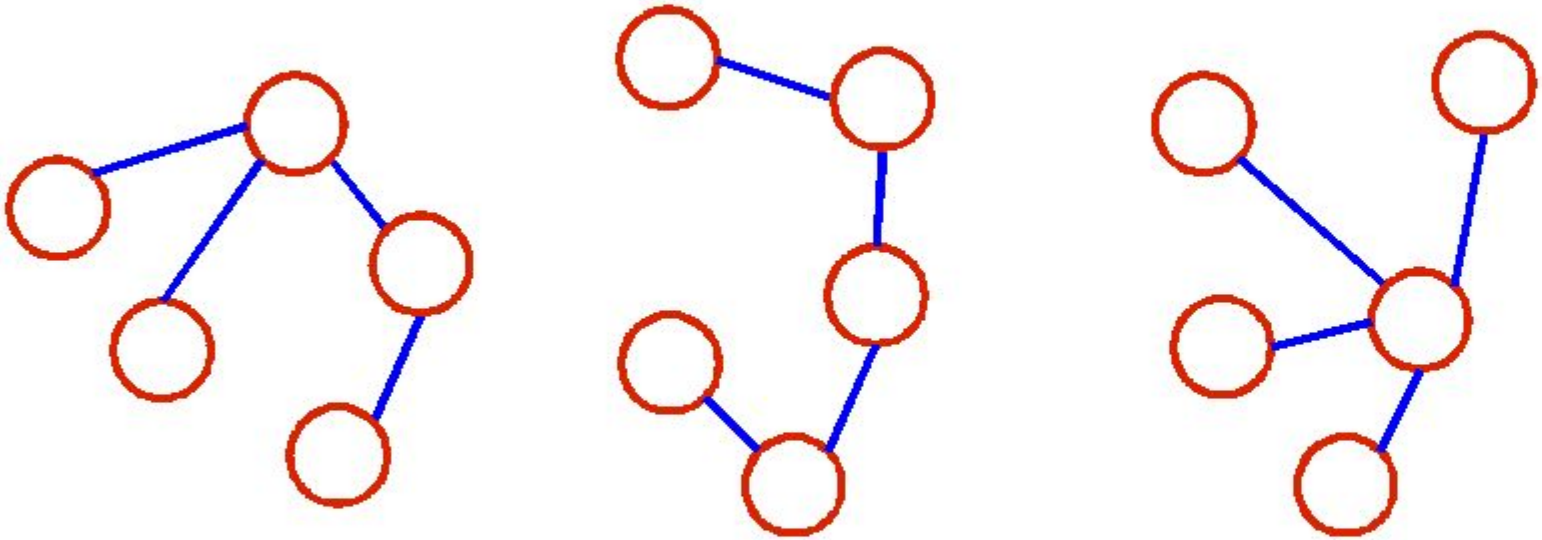
- **Grafo acíclico**: grafo sem ciclos O exemplo abaixo é um grafo acíclico.
- **Árvore**: grafo acíclico conexo. O exemplo à direita é uma árvore.
- Em uma árvore, $m = n-1$ (todo vértice tem grau 2).
- Se $m < n-1$, então G é um grafo não conexo.





Floresta

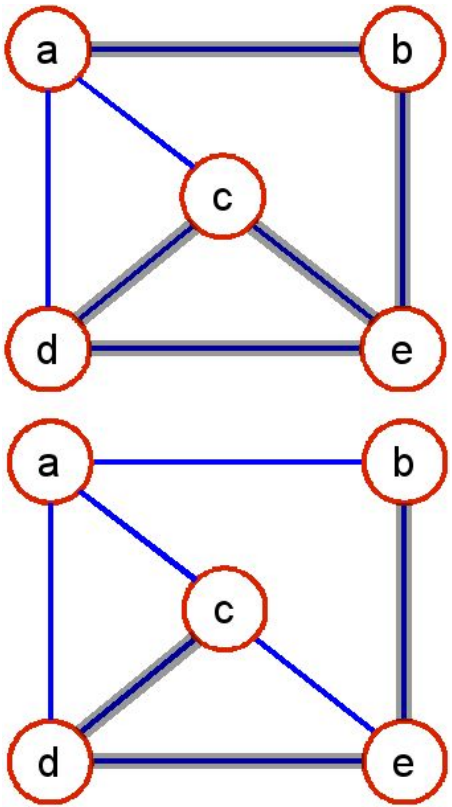
- Conjunto de árvores



- Introdução e Problemas
- Digrafos
  - Como especificar um digrafo?
- Grafos
  - Tipos de Grafos
- **Definições**
- Propriedades
- Problema das Pontes de Konigsberg

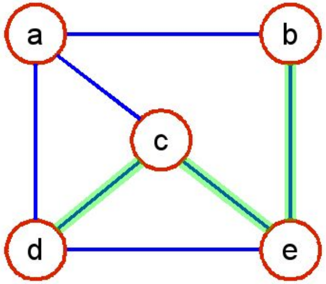
Caminho (1)

- Caminho: sequência de vértices v_1, v_2, …, v_k tal que os vértices consecutivos v_i e v_{i+1} são adjacentes.
- Ao lado temos os caminhos
  - a,b,e,d,c,e
  - b,e,d,c

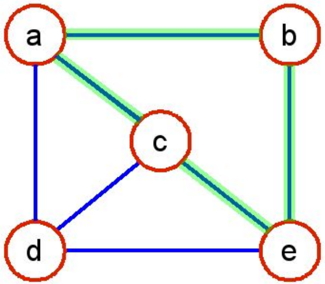


Caminho (2)

- Caminho simples: caminho em que não há vértices repetidos
- Ciclo simples: caminho simples v1, v2, … , vk, onde vk = v1



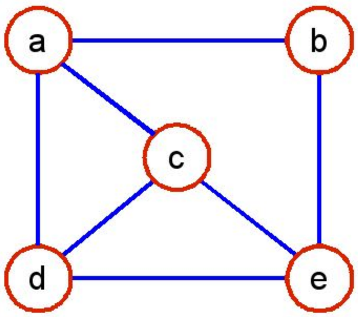
caminho simples: b,e,c,d



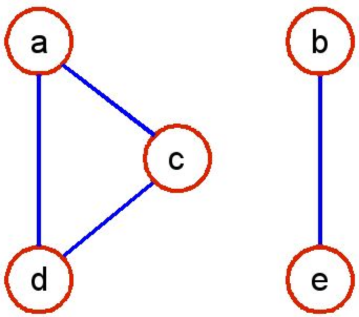
Ciclo simples: a,b,e,c,a

Conectividade

- **Grafo conexo**: para todo par de vértices distintos u,v no grafo, existe um caminho de u para v. Um grafo que não é conexo é dito **não conexo**.



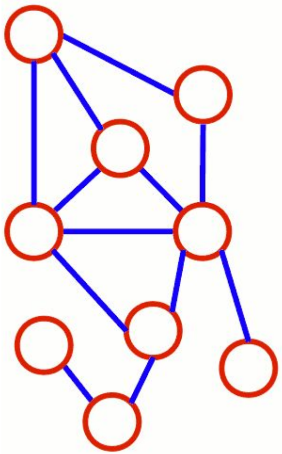
Conexo



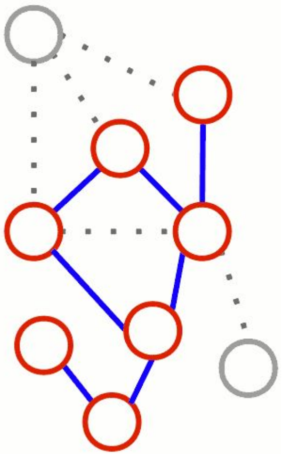
Não conexo

Subgrafos (1)

- subgrafo: subconjunto de vértices e arestas que formam um grafo



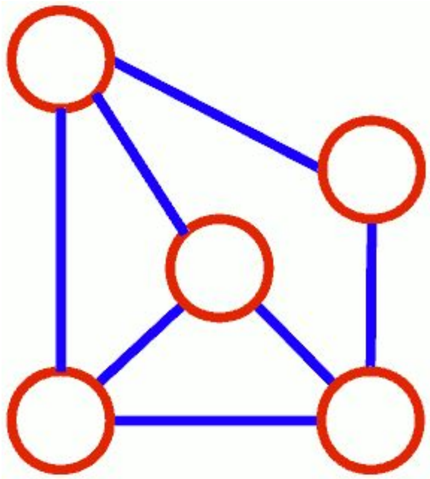
Grafo G



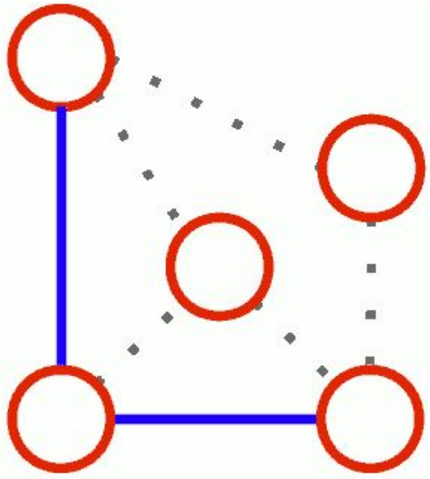
Subgrafo de G

Subgrafos (2)

- subgrafo gerador: (spanning subgraph) de G: é um subgrafo que contém todos os vértices de G



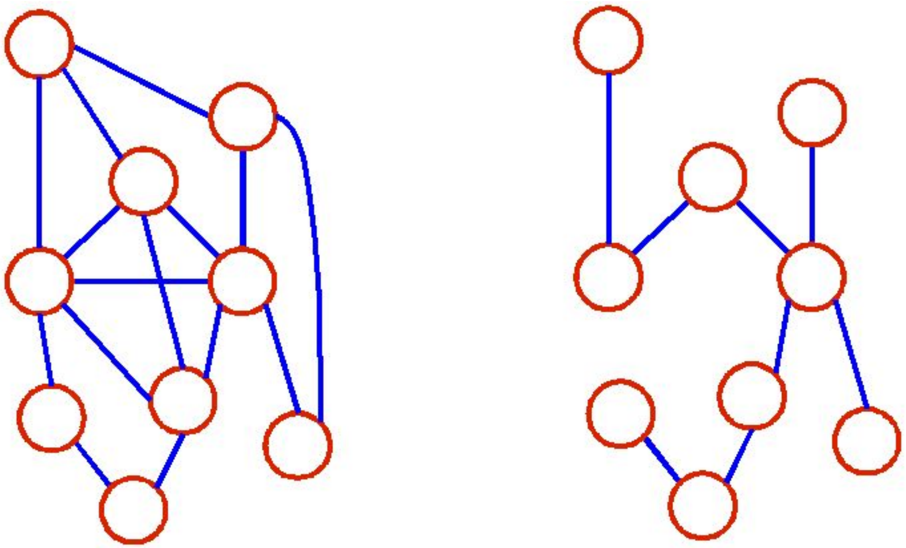
Grafo G



Subgrafo gerador de de G

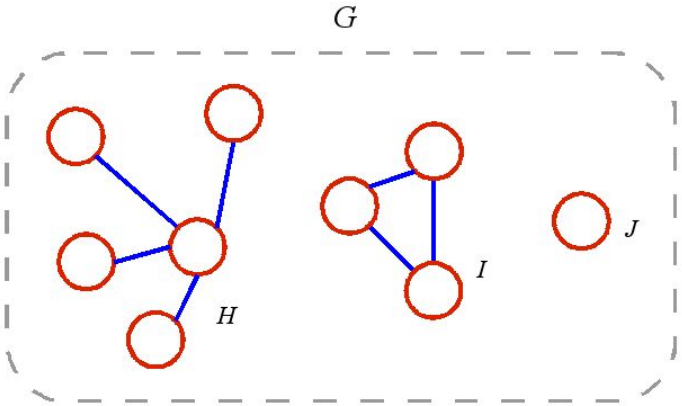
Árvore Geradora

- Uma árvore geradora de G é um subgrafo que é uma árvore e que contém todos os vértices de G. Abaixo, à esquerda, um grafo G e à esquerda uma árvore geradora de G.



Componente conexo maximal

- Componente conexo: subgrafo conexo maximal
- Se H é um subgrafo conexo maximal de G, não existe nenhum supergrafo de H que é um subgrafo conexo de G. Obs: nada impede que G tenha outro subgrafo conexo
- O grafo abaixo possui 3 componentes conexos.



- Introdução e Problemas
- Digrafos
    - Como especificar um digrafo?
- Grafos
    - Tipos de Grafos
- Definições
- **Propriedades**
- Problema das Pontes de Konigsberg

Número de arestas

Seja n o número de vértices e m o número de arestas de um grafo:

1. A soma do grau dos vértices é igual ao dobro do número de arestas
2. Em um grafo, o número de arestas é limitado
   a. num grafo completo de n vértices, o número de arestas é: $n(n-1)/2$
   b. $m \leq n(n-1)/2$.
3. Em um digrafo, podemos ter 2 arcos para cada aresta de um grafo. Portanto.
   $m \leq n(n-1)$

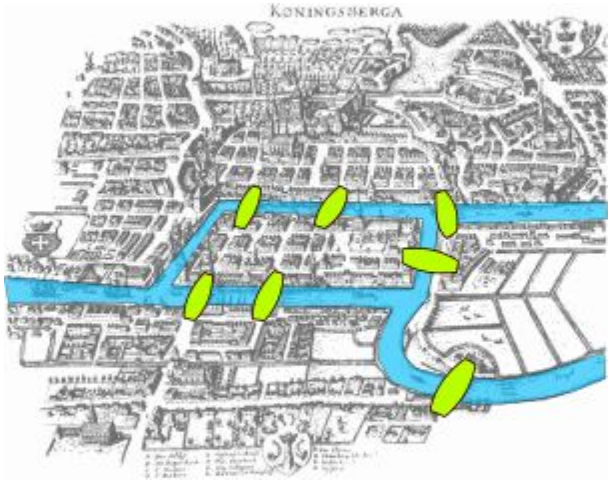
Grafo denso e esparso

- Grafo denso
  - Um grafo simple é dito denso se a quantidade de arestas se aproxima do limitante definido no slide anterior

- Grafo esparso:
  - G é esparso se a quantidade de arestas é muito menor que o limitante. Por exemplo, se $m \cong n-1$, para um grafo conexo.

- Introdução e Problemas
- Digrafos
    - Como especificar um digrafo?
- Grafos
    - Tipos de Grafos
- Definições
- Propriedades
- **Problema das Pontes de Konigsberg**

O problema das pontes de Königsberg



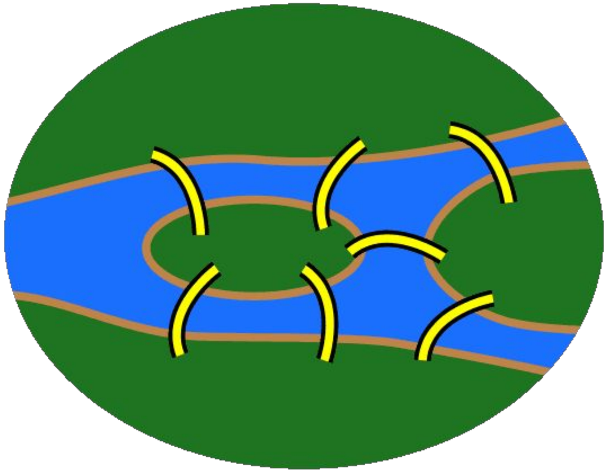
- Cidade de Königsberg (na Prússia até 1945, atual Kalingrado na Rússia de hoje), cortada pelo rio Pregolia

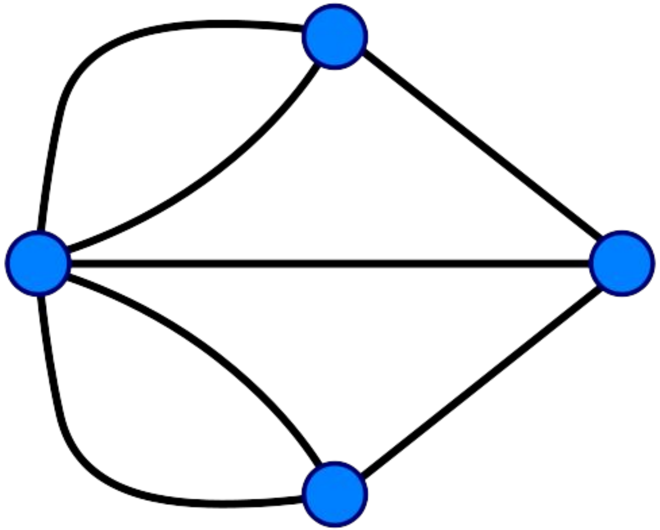
- Há duas grandes ilhas que na época contavam com 7 pontes.

- Problema: encontrar um caminho que passe por cada ponte uma única vez
  - as ilhas só podem ser alcançadas pelas pontes.
  - cada ponte deve ser cruzada completamente.

O problema das pontes de Königsberg

- Leonard Euler, em 1735, resolveu o problema, escrevendo um teorema provando que o caminho não era possível, por meio de um modelo que acredita-se ser o primeiro grafo da história.





O problema das pontes de Königsberg

- O modelo não é exatamente um grafo porque há mais de uma aresta entre dois vértices u e v. Mais especificamente é um multigrafo.
- O teorema de Euler é considerado o primeiro teorema de teoria dos grafos

- Euler estabeleceu que um caminho que passe por todos as arestas uma única vez, atualmente chamado **Caminho Euleriano** , depende do grau dos vértices do grafo.
    - é preciso haver exatamente zero ou dois nós de grau ímpar no grafo para que um caminho euleriano seja possível.