

GABARITO Prova 5: Sistemas não lineares, interpolação.

Lembrete: O método de Newton é implementado em Octave como

```
k=1; x=x0; err=1e+10;
while ((k<=kmax) && (err > tol))
    f = .....;
    J = .....;
    dx = -J\f;
    err = .....;
    x = x + dx;
    k = k + 1;
endwhile
```

onde f e J correspondem à função cujo zero se quer determinar e à sua matriz Jacobiana, respectivamente. O código faltante depois de `err` depende do critério de parada desejado.

1. **(3 pontos)** Escrever um código baseado no método de Newton para calcular a raiz quadrada de um número complexo $w = a + ib$ utilizando apenas somas, subtrações, multiplicações, divisões e potências inteiras. Utilize critério de parada de “teste do resíduo”. Os dados são a e b , e o resultado desejado deve estar nas variáveis x e y (parte real e parte imaginária).

Lembrete: Se $z = x + iy$, então $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

No código do lembrete trocar x por z , e então fazer

```
f=[z(1)^2-z(2)^2-a;2*z(1)*z(2)-b];
J=[2*z(1),-2*z(2);2*z(2),2*z(1)];
err=norm(dz);
x=z(1); y=z(2);
```

Também serve, mas não era a ideia,

```
f=z^2-a-i*b;
J=2*z;
err=norm(dz);
x=real(z); y=imag(z);
```

2. **(3 pontos)** Escrever um código baseado no método de Newton para calcular a raiz cúbica de um número complexo $w = a + ib$ utilizando apenas somas, subtrações, multiplicações, divisões e potências inteiras. Utilize critério de parada de “erro absoluto”. Os dados são a e b , e o resultado desejado deve estar nas variáveis x e y (parte real e parte imaginária).

Lembrete: Se $z = x + iy$, então $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y)$.

No código do lembrete trocar x por z , e então fazer

```
f=[z(1)^3-3*z(1)*z(2)^2;-z(2)^3+3*z(1)^2*z(2)];
J=[3*z(1)^2-3*z(2)^2,-6*z(1)*z(2);
    6*z(1)*z(2),-3*z(2)^2+3*z(1)^2];
err=norm(dz);
x=z(1);y=z(2);
```

Também serve, mas não era a ideia,

```
f=z^3-a-i*b;
J=3*z^2;
err=norm(dz);
x=real(z); y=imag(z);
```

3. **(3 pontos)** Escrever um código baseado no método de Newton que calcule o valor x^* que minimiza a distância (euclidiana usual) entre o gráfico da função $f(x) = -\cos x$ e o ponto $(x, y) = (0, 3)$. Utilize critério de parada de “erro absoluto”.

A distância d é dada por

$$d^2 = x^2 + (\cos x + 3)^2$$

e queremos minimizá-la, isto é, achar um zero da derivada de d^2 ,

$$f(x) = 2x + 2(\cos x + 3)(-\sin x).$$

```
f=2*x-2*sin(x)*(cos(x)+3);
J=2-2*(cos(x)*(cos(x)+3)-sin(x)^2;
err=abs(dx);
```

4. **(3 pontos)** Se deseja uma regra de integração da forma

$$I = A_1 y(x_1) + A_2 y(x_2) + A_3 y(x_3)$$

sendo que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, e que se deseja aproximar a integral

$$\int_0^4 y(x) dx.$$

Utilizando interpolantes quadráticos, calcule A_1 , A_2 e A_3 de maneira que I integre exatamente qualquer polinômio quadrático.

$$(A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

5. **(3 pontos)** Se deseja uma regra de integração da forma

$$I = A_1 y(x_1) + A_2 y(x_2) + A_3 y(x_3)$$

sendo que $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$, e que se deseja aproximar a integral

$$\int_0^4 y(x) dx.$$

Utilizando interpolantes quadráticos, calcule A_1 , A_2 e A_3 de maneira que I integre exatamente qualquer polinômio quadrático.

$$(A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{16}{9}, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}\right).$$

6. **(3 pontos)** Se deseja uma regra de integração da forma

$$I = A_1 y(x_1) + A_2 y(x_2) + A_3 y(x_3)$$

sendo que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$, e que se deseja aproximar a integral

$$\int_0^5 y(x) dx.$$

Utilizando interpolantes quadráticas, calcule A_1 , A_2 e A_3 de maneira que I integre exatamente qualquer polinômio quadrático.

$$(A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{55}{12}, -\frac{20}{3}, \frac{85}{12} \right) .$$

$$F(\beta, \Delta t) = -\frac{1}{3 + 2\beta\Delta t} ,$$

$$G(\beta, \Delta t) = \frac{4}{3 + 2\beta\Delta t} .$$

7. **(3 pontos)** A equação de um circuito RLC passivo é dada, em termos da corrente $I(t)$, por

$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) + 2\alpha \frac{d}{dt} I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0 , \quad (*)$$

onde α é chamada de frequência de Neper e ω_0 é a frequência natural.

Suponha já calculados valores numéricos I_{n-1} e I_n , correspondentes a tempos $t_n - \Delta t$ e t_n , respectivamente. Utilizando interpolação quadrática, obtenha uma regra da forma

$$I_{n+1} = F(\alpha, \omega_0, \Delta t) I_{n-1} + G(\alpha, \omega_0, \Delta t) I_n$$

para I_{n+1} (correspondente a tempo $t_n + \Delta t$), de tal maneira que a corrente interpolada satisfaça exatamente a equação diferencial (*) ao tempo t_n .

$$F(\alpha, \omega_0, \Delta t) = -\frac{1 - \alpha\Delta t}{1 + \alpha\Delta t} ,$$

$$G(\alpha, \omega_0, \Delta t) = \frac{2 - \omega_0^2 \Delta t^2}{1 + \alpha\Delta t} .$$

9. **(3 pontos)** Considerar uma viga ocupando o intervalo $0 \leq x \leq L$. A deflexão vertical da viga é uma função $y(x)$ que será interpolada por uma função cúbica a partir dos valores $y(0) = y'(0) = 0$, $y_1 = y(x = L)$ e $w_1 = y'(x = L)$, sendo que $L = 2$.

Escrever um código em Octave que, a partir de y_1 e w_1 (considerados como dados), estime a energia de flexão da viga:

$$E_B(y_1, y_2) \simeq \int_0^L (y''(x))^2 dx$$

Escrevemos

$$y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 ,$$

de maneira que

$$y'(x) = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 ,$$

$$y''(x) = 2a_3 + 6a_4 x .$$

e portanto,

$$\int_0^2 (y''(x))^2 dx = 8a_3^2 + 48a_3 a_4 + 96a_4^2 .$$

Já podemos fazer o código,

```
A = [1 0 0 0; 0 1 0 0;
      1 2 4 8; 0 1 4 12];
b = [0; 0; y1; w1];
a = A\b;
Eb = 8*a(3)^2+48*a(3)*a(4)+96*a(4)^2;
```

8. **(3 pontos)** A equação da velocidade V de queda de um objeto é dada por

$$\frac{d}{dt} V(t) + \beta V(t) - g = 0 , \quad (*)$$

onde β é um coeficiente constante de arrasto e g é a gravidade.

Suponha já calculados valores numéricos V_{n-1} e V_n , correspondentes a tempos $t_n - \Delta t$ e t_n , respectivamente. Utilizando interpolação quadrática, obtenha uma regra da forma

$$V_{n+1} = F(\beta, \Delta t) V_{n-1} + G(\beta, \Delta t) V_n + H(g, \beta, \Delta t)$$

para V_{n+1} (correspondente ao tempo $t_n + \Delta t$), de tal maneira que a velocidade interpolada satisfaça exatamente a equação diferencial (*) ao tempo $t_n + \Delta t$.