SME0602 - Eng. Comp. - 17/10/2017

Nome:

No. USP:

Prova 4: Cálculo numérico de autovalores

Lembrete 1: Chamamos de "aplicar o método das potências à matriz B" a iterar até a convergência o algoritmo

- Dado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$, $\eta^{(0)} = y^{(0)^T} B\, y^{(0)}$
- **for** $k = 1, 2, \ldots$
  - $x^{(k)} = B\, y^{(k-1)}$
  - $y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$
  - $\eta^{(k)} = y^{(k)^T} B\, y^{(k)}$
  - Se $|\eta^{(k)} - \eta^{(k-1)}| < TOL\ |\eta^{(k)}| \ \Rightarrow$ Sair
- **end for**
- **return** $\eta = \eta^{(k)}$

O resultado é o autovalor de B mais afastado da origem.

Lembrete 2: Dada uma matriz A quadrada diagonalizável, o comando de Octave
`[U,D]=eig(A)`
calcula matrizes U (não singular) e D (diagonal) tais que $A = U\ D\ U^{-1}$.

Lembrete 3: Dada uma matriz A qualquer ($m \times n$), o comando de Octave
`[U S V]=svd(A)`
calcula duas matrizes ortogonais U (de $m \times m$) e V (de $n \times n$), e uma matriz diagonal S (de $m \times n$) com elementos diagonais positivos e ordenados de maneira não crescente, tais que

$$A = U\ S\ V^T\ .$$

1. (**2 pontos**) Seja A uma matriz 40×40 cujos autovalores são 11, 12, 13, …, 49, 50. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = (A - 8\ I)^{-1}$, a sequência dos $\eta^{(k)}$ convergirá para:
   (a) 1
   (b) 1/3
   (c) 1/11
   (d) 1/19
   (e) 1/58
   (f) 1/29
   (g) 0
   (h) Não convergirá.
   (i) Nenhum dos anteriores.

2. (**3 pontos**) Seja A uma matriz $n\times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = (A-2\,I)^{-1}$, a sequência dos $\eta^{(k)}$ converge para 5.
   Então é possível concluir que (responda Verdadeiro ou Falso à esquerda de cada item):
   (a) 11/5 é o autovalor de A mais próximo de 2.
   (b) 7 é autovalor de A.
   (c) 5/11 é o autovalor de A mais afastado de 2.
   (d) 2.1 não é autovalor de A.
   (e) 5 é o autovalor de A mais afastado de 2.
   (f) 1/5 é o autovalor de A mais próximo de 2.

3. (**1 ponto**) Seja $[UD] = eig(A)$. Dizer se Verdadeiro ou Falso à esquerda de cada item:
   (a) As colunas de U são autovetores de A^2.
   (b) Se A é simétrica, as linhas de U^{-1} são autovetores de A.
   (c) Se A é simétrica, U é simétrica.
   (d) Se A é simétrica, D é real.

4. (**3 pontos**) O logaritmo de uma matriz A de $n\times n$ se define da seguinte maneira: Se
   $$A = U\, D\, U^{-1}$$
   com $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então
   $$\log(A) = U\ \log(D)\, U^{-1}\ ,$$
   onde $\log(D) = \text{diag}(\log(\lambda_1), \ldots, \log(\lambda_n))$.
   Os comandos de Octave relacionados são `eig` e `log`.

```
-- Built-in Function: [V, LAMBDA] = eig (A)
Compute the eigenvalues and eigenvectors of a
     matrix.
Eigenvectors: Columns of V
Eigenvalues: Diagonal elements of LAMBDA

 -- Mapping Function: log (X)
Compute the natural logarithm for each element of X.
```

   Escrever um pequeno programa de Octave que, dada a matriz `Mat`, de `n` por `n`, calcule log(`Mat`). Notar que programar simplesmente "`log(Mat)`" dará errado.

5. (**2 pontos**) *Notação:* u_i é a coluna número i de U, e v_i a coluna número i de V, sendo $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de A e por tanto $Av_i = \sigma_i u_i$ e $A^T u_i = \sigma_i v_i$. Notar que denotamos por σ_i todos os valores da diagonal de Σ, e não apenas os positivos. Também, $A^\dagger$ é a pseudoinversa de A ($= V\Sigma^\dagger U^T$).
   Dizer se Verdadeiro ou Falso à esquerda de cada item:
   (a) Se $\sigma_i = 0$ então u_i está no núcleo de A.
   (b) Se $\sigma_i > 0$ então u_i está na imagem de A.
   (c) $u_i^T A^T v_j = 0$ if $i \neq j$.
   (d) $AA^\dagger = A^\dagger A$