SME0602 - Eng. Comp. - 26/09/2017

Nome:

No. USP:

Prova 2: Montagem e resolução de sistemas lineares

1. **(3 pontos)** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

responda as seguintes perguntas:

(a) Existem L e U (triangulares inferior e superior, respectivamente) tais que $A = L\,U$?

(b) Seja `lu_decomp` a função de Octave vista nos slides, que calcula a fatoração LU de uma matriz **sem realizar pivotamento**. Que resposta dará Octave ao comando `[L U]=lu_decomp(A)` ?

(c) A função `lu` de Octave calcula a decomposição LU com pivotamento parcial, da forma

$$\texttt{[L U P]=lu(A)} \;\Leftrightarrow\; L\,U = P\,A$$

Calcular L, U e P.

$L =$

$U =$

$P =$

---

2. **(5 pontos)** Responder com **V**erdadeiro ou **F**also à esquerda:

(a) Para toda matriz quadrada e inversível A, a matriz $B = A^T A$ é simétrica e definida positiva.

(b) Se pós-multiplicar (ou seja, multiplicar à direita) uma matriz A por uma matriz de permutação P, então o resultado será uma matriz com as mesmas linhas que A, mas numa ordem diferente.

(c) Todas as matrizes de permutação são ortogonais.

(d) Conhecida a fatoração LU de A (`[l,u]=lu(a)`), podemos calcular o determinante dela como `det(u)*det(l)`.

(e) Se uma matriz simétrica tem traço (soma da diagonal) positivo, então ela pode ser fatorada da forma

$$A \;=\; H\,H^T$$

(f) Se meu computador demora 4 segundos para calcular a fatoração de Cholesky de uma matriz 100×100 (cheia), então demorará da ordem de 400 segundos para uma matriz de 1000×1000.

(g) Considerando o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, a condição necessária e suficiente para convergência é que os autovalores de B sejam todos negativos.

(h) Partindo do mesmo ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Gauss-Jacobi vai calcular o mesmo segundo ponto $\mathbf{x}^{(1)}$ para os dois sistemas seguintes,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

que são obviamente equivalentes.

(i) O custo computacional de cada iteração do método de Gauss-Jacobi para matrizes $n \times n$ cheias é $O(n^2)$.

(j) Para matrizes esparsas $n \times n$ com apenas $b \ll n$ elementos extradiagonais não nulos por linha, o custo computacional de cada iteração do método de Gauss-Seidel é $O(b\,n^2)$.

Lembrete:

Def. 1: Uma forma quadrática homogênea em $\mathbb{R}^n$ é um polinômio homogêneo de grau 2 em m variáveis, da forma

$$Q(x) = \alpha\,x_1^2 + \beta\,x_1 x_2 + \gamma\,x_1 x_3 + \ldots + \omega x_2^2 + \ldots$$

Teorema 1: Para toda forma quadrática homogênea Q nas variáveis $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ existe uma única matriz simétrica A tal que

$$Q(x) = (1/2)\;x^T\,A\,x\;.$$

A forma Q tem um mínimo único em $x = 0$ se e só se a matriz A é definida positiva.

Teorema 2: Seja A uma matriz simétrica definida positiva $m \times m$ e seja $b \in \mathbb{R}^m$. Então, sendo

$$F(x) = (1/2)\,x^T\,A\,x \;-\; x^T\,b$$

se cumpre $\nabla F(x) = A\,x \;-\; b$ e o único x^* que minimiza F é a solução do sistema linear

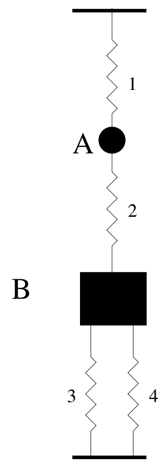
$$A\,x \;=\; b\;.$$

Teorema 3: Definindo

$$F(x) = (1/2)\, x^T A x - x^T b$$

e $r(x) = Ax - b$, de todos os pontos da forma $y = x^{(k)} + \beta_k\, d^{(k)}$, qualquer que seja a escolha de $d^{(k)}$, o valor de β_k que minimiza $F(y)$ é

$$\beta_k = -\frac{{d^{(k)}}^T\, r(x^{(k)})}{{d^{(k)}}^T\, A\, d^{(k)}} \; .$$



3. **(4 pontos)** No diagrama da Figura se observam duas massas (m_A, m_B) e quatro molas (1, 2, 3, 4) de constantes $k_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$. A energia desse sistema, sendo que a base está em $z = 0$ e o topo em $z = 1$, é dada por

$$E = \frac{k_1(1 - z_A)^2}{2} + \frac{k_2(z_A - z_B)^2}{2} + \frac{(k_3 + k_4)z_B^2}{2}$$

   (a) (2 pontos) Determinar uma matriz A, um vetor b e um número real c tais que a energia do sistema se escreva, sendo $z = (z_A, z_B)^T$,

$$E(z) = \frac{1}{2}\, z^T\, A\, z \; - \; z^T\, b \; + \; c \; .$$

$A =$

$b =$

$c =$

   (b) (2 pontos) Calcular o vetor $z^{(1)}$ que resulta de fazer uma iteração do método dos gradientes a partir do chute inicial $z^{(0)} = (0, 0)^T$.

$z^{(1)} =$
