

Mínimos quadrados contínuos

1. Determinar o polinômio quadrático $p^*(x)$ tal que

$$\int_0^1 (f(x) - p^*(x))^2 dx \leq \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

para todo $p(x)$ quadrático. Considere $f(x) = e^{-2x}$. Plote o resultado.

2. Determinar o polinômio linear $p^*(x, y)$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - p^*(x, y))^2 dx dy \leq \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - p(x, y))^2 dx dy$$

para todo $p(x, y)$ linear. Considere $f(x, y) = e^{-2x-y}$. Plote o resultado.

Sistemas sobredeterminados e fatoração QR

Seja $D \in \mathbb{R}^{m \times N}$ uma matriz de dados ($m \gg 1$). A quantidade representada numa coluna i qualquer será chamada de d_i (e.g., superfície, preço, etc.).

1. Diga se é verdadeiro ou falso que cada um dos seguintes códigos Octave ajustam a coluna k como um polinômio de segundo grau da coluna j e calculam o valor do ajuste no valor $d_j = a$. Os códigos podem ser errados por dar o resultado errado ou por conter erros de programação.

O ajuste desejado é por quadrados mínimos, com o produto escalar usual. Os dados de entrada são m , D , j , k , e a . O valor do ajuste deve estar na variável de saída val .

- (a) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`z=[1,a,a^2]';`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=z'*x;`
- (b) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`z=[1,a,a^2];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=z*x;`
- (c) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`z=[1;a;a^2];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=z.*x;`
- (d) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)+x(2)*a+x(3)*a*a;`
- (e) `A=[D(:,j).*D(:,j),D(:,j),ones(m,1)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)+x(2)*a+x(3)*a*a;`

- (f) `A=[D(:,j).*D(:,j),D(:,j),ones(m,1)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)*a^2+x(2)*a+x(3);`
- (g) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x'*a;`
- (h) `A=[D(:,j)-1,D(:,j)+1,...`
`(D(:,j)-1).*(D(:,j)+1)];`
`z=[a-1,a+1,a^2-1]';`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=z'*x;`
- (i) `A=[D(:,j)-1,D(:,j)+1,...`
`D(:,j).*D(:,j)];`
`z=[a-1,a+1,a^2]';`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=z'*x;`
- (j) `A=[D(:,j)-1,D(:,j)+1,...`
`(D(:,j)-1).*(D(:,j)+1)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)*(a-1)+x(2)*(a+1)+...`
`x(3)*(a-1)*(a+1);`
- (k) `A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=1+a*x+a^2*x^2;`
- (l) `A=[1,D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)+x(2)*a+x(3)*a*a;`
- (m) `A=[D(:,j)-1,D(:,j)+1,...`
`(D(:,j)-1).*(D(:,j)+1)];`
`b=D(:,k);`
`x=A\b;`
`val=x(1)+x(2)*a+x(3)*a^2;`

2. Se sabe que as colunas 1 e 2 de D são linearmente independentes. Se deseja calcular a distância (euclidiana usual) da coluna k ao espaço gerado pelas colunas 1 e 2.

Para isto, se desenvolveu o seguinte código:

```
A=[D(:,1),D(:,2)];
[Q R]=qr(A,0);
p=Q*Q'*D(:,k);
val=norm(*****);
```

Que deve ser programado em ***** para que val tenha o valor desejado?

Rta: `val=norm(p-D(:,k));`

3. Se sabe que as colunas 1 e 2 de D são linearmente independentes. Se deseja calcular a distância (euclidiana usual) da coluna k ao espaço gerado pelas colunas 1 e 2.

Para isto, se desenvolveu o seguinte código:

```
A=[D(:,1),D(:,2)];
[Q R]=qr(A);
p=Q(:,3:m)*Q(:,3:m)'\*D(:,k);
val=norm(*****);
```

Que deve ser programado em ***** para que val tenha o valor desejado?

Rta: val=norm(p);

4. Se deseja ajustar a coluna 5 de D como uma combinação linear das colunas 1 a 4, no sentido dos quadrados mínimos com o produto escalar usual. Esse ajuste é então utilizado para retornar o valor estimado de d_5 quando $d_1 = a$, $d_2 = b$, $d_3 = c$, $d_4 = d$.

Para isto, se desenvolveu o seguinte código:

```
A=D(:,1:4);
b=D(:,5);
x=A\b;
val=*****;
```

Que deve ser programado em ***** para que val tenha o valor desejado?

Rta: val=[a b c d]*x;

5. Responder Verdadeiro ou Falso, sendo A matriz $m \times n$:

- (a) Sempre existem $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonal e $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ triangular superior tais que

$$A = QR.$$

verdadeiro

- (b) É necessário que A seja de posto completo para que as primeiras n colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)$.

verdadeiro

- (c) É necessário que A seja de posto completo para que as últimas $m - n$ colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)^\perp$.

verdadeiro

- (d) É suficiente que A seja de posto completo para que as últimas $m - n$ colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)^\perp$.

verdadeiro

- (e) As últimas $m - n$ colunas de Q pertencem a $\text{Nu}(A^T)$, sempre.

verdadeiro

- (f) Se A é de posto completo e $b \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, a projeção de b sobre $\text{Im}(A)$ é dada por

```
[Q R]=qr(A);
pb=Q(:,1:n)*Q(:,1:n)'\*b;
```

verdadeiro

- (g) Sempre existem $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (de colunas ortonormais) e $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior tais que

$$A = Q_1 R_1.$$

verdadeiro

- (h) É necessário que A seja de posto completo para que as colunas de Q_1 sejam base de $\text{Im}(A)$.

verdadeiro

- (i) Se A é de posto completo e $b \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, a projeção de b sobre $\text{Im}(A)$ é dada por

```
pb=Q1*Q1'\*b
```

verdadeiro

- (j) Se deseja ajustar a coluna r de A com combinações lineares das primeiras 3 colunas. O código em Octave para fazer isto é

```
M=A(:,1:3);b=A(:,r);
x=M\b;
```

e o ajuste correspondente é

$$c_r(A) \simeq x_1 c_1(A) + x_2 c_2(A) + x_3 c_3(A)$$

verdadeiro

Problemas para pensar

1. No arquivo `basket.txt` tem dados de jogadores de basket. As colunas contém altura, peso, porcentagens de acerto em arremessos de quadra e de lances livres, média de pontos por jogo, e nota média dada por alguns jornalistas.

Se suspeita que a nota que os jornalistas colocam não se baseia apenas nos dados objetivos de performance (colunas 3 a 5), mas que os jornalistas tendem a colocar notas maiores aos jogadores de mais altura.

Elabore uma estratégia para analisar essa suspeita, e implemente ela em Octave. Qual é a sua conclusão?

2. Estude o código `census.m`, cujo objetivo é extrapolar a população mundial além de 2020 por diversos métodos. Analize os resultados como função do grau do polinômio utilizado.

Responda:

- Quais são as previsões de população para 2020, 2030 e 2040 quando se ajusta com polinômios de grau 2, 4 e 8?

Resposta:

	2	4	8
2020	342.05	332.07	181.76
2030	375.88	351.12	-589.91
2040	411.54	362.72	-3208.79

- Qual considera ser a melhor previsão para cada um dos anos? Porquê?
- Explique a conveniência da opção “polynomial” sobre a “polynomial naïf”.
- Compare também a opção “spline”, por exemplo com o caso polinomial de grau 2. Qual é melhor? Porque se diz que a aproximação “splines” é interpolatória e a outra não?

Boa prática!!