SME0602 - 2017

Prof. Gustavo Buscaglia

Lista - Interpolação

Material complementar de estudo: Slides do prof. Afonso Paiva.

Sejam $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ pontos conhecidos, $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, e $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \mathbb{R}$ valores conhecidos de uma função.

1. Escreva um código Octave que, a partir dos valores y_m, y_{m-1} e y_{m-2}, calcule uma estimativa da derivada $y'(x)$ avaliada em x_m utilizando interpolação quadrática. Particularize para o caso em que os x_i estão equi-espaçados a distância h.
2. Escreva um código Octave que, a partir dos valores y_m, y_{m-1}, y_{m-2} e y_{m-3}, calcule uma estimativa da derivada $y'(x)$ avaliada em x_m utilizando interpolação cúbica. Particularize para o caso em que os x_i estão equi-espaçados a distância h.
3. Considerando a função $y(x) = \sin(x)$, $h = 0.1$ e $m = 4$, com $x_1 = 0$, compare as estimativas dos dois itens anteriores com o valor exato $y'(x_4) = \cos(0.3)$.
4. Escreva um código Octave que, a partir dos valores y_m, y_{m-1} e y_{m-2}, calcule uma estimativa da derivada segunda $y''(x)$ avaliada em x_m utilizando interpolação quadrática. Particularize para o caso em que os x_i estão equi-espaçados a distância h.
5. Escreva um código Octave que, a partir dos valores y_m, y_{m-1}, y_{m-2} e y_{m-3}, calcule uma estimativa da derivada segunda $y''(x)$ avaliada em x_m utilizando interpolação cúbica. Particularize para o caso em que os x_i estão equi-espaçados a distância h.
6. Considerando a função $y(x) = \sin(x)$, $h = 0.1$ e $m = 4$, com $x_1 = 0$, compare as estimativas dos dois itens anteriores com o valor exato $y''(x_4) = \sin(0.3)$.
7. Modificar os códigos anteriores para quando se deseja aproximar a derivada, ou a derivada segunda, no ponto $(x_m + x_{m-1})/2$ e/ou no ponto x_{m-1}.

---

8. Escrever um código octave que estime as integrais
$$I_1 = \int_{x_1}^{x_m} y(x)\, dx$$
$$I_2 = \int_{x_1}^{x_m} (y'(x))^2\, dx$$
$$I_3 = \int_{x_1}^{x_m} (y''(x))^2\, dx$$
utilizando a spline cúbica natural que interpola os valores $y_1, \ldots, y_m$.
9. Seja $m = 3$. Escrever um código Octave que estime a integral
$$I = \int_{x_1}^{x_m} y(x)\, dx$$
integrando a interpolante quadrática de $y(x)$. Particularizar ao caso de pontos equiespaçados a distância h.
10. Repetir o exercício anterior com $m = 4$ e interpolantes cúbicas.
11. Considerar uma viga ocupando o intervalo $0 \leq x \leq L$. A deflecção vertical da viga é uma função $y(x)$ que será interpolada por uma função cúbica a partir dos valores $y(0) = y'(0) = 0$, $y_1 = y(x_1 = L/2)$ e $y_2 = y(x_2 = L)$.

    Escrever um código em Octave que, a partir de y_1 e y_2, estime

    (a) Energia de flexão: $E_B(y_1, y_2) \simeq \int_0^L (y''(x))^2\, dx$

    (b) Energia potencial gravitatória: $E_G(y_1, y_2) \simeq -\int_0^L y(x)\, dx$
12. A partir do resultado do exercício anterior, escrever um código que calcule y_1^* e y_2^* que minimizem a energia total $E = E_B + E_G$. Isto permite calcular a deformação da viga quando submetida ao peso próprio.

---

13. A equação de um circuito RLC passivo é dada, em termos da corrente $I(t)$, por
$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) + 2\,\alpha\, \frac{d}{dt} I(t) + \omega_0^2\, I(t) = 0\ ,$$
onde α é chamada de frequência de Neper e ω_0 é a frequência natural.

    Foram medidos valores I_1, I_2, ..., I_m, a tempos $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$. Se pede dar uma estimativa de α e de ω_0 a partir desses valores, utilizando interpolantes quadráticas entre ternas de pontos consecutivos.
14. A equação de um pêndulo é
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\, \sin\theta = 0\ .$$
Considere tempos $t_{m-2} = t_m - 2\,h$, $t_{m-1} = t_m - h$ e t_m, com valores angulares correspondentes θ_{m-2}, θ_{m-1} e θ_m.

    Qual deve ser o valor de θ_m, como função de θ_{m-1} e θ_{m-2}, de tal maneira que a equação diferencial seja cumprida **ao tempo $\tau = t_{m-1}$ pela interpolada quadrática de $\theta(t)$**.

    Programar a regra obtida $(\theta_{m-2}, \theta_{m-1}) \mapsto \theta_m$ para calcular a evolução de um pêndulo com condições iniciais $\theta_1 = \theta_2 = 0.95\,\pi$.
15. Repetir o exercício anterior para $\tau = t_m$.

Boa prática!