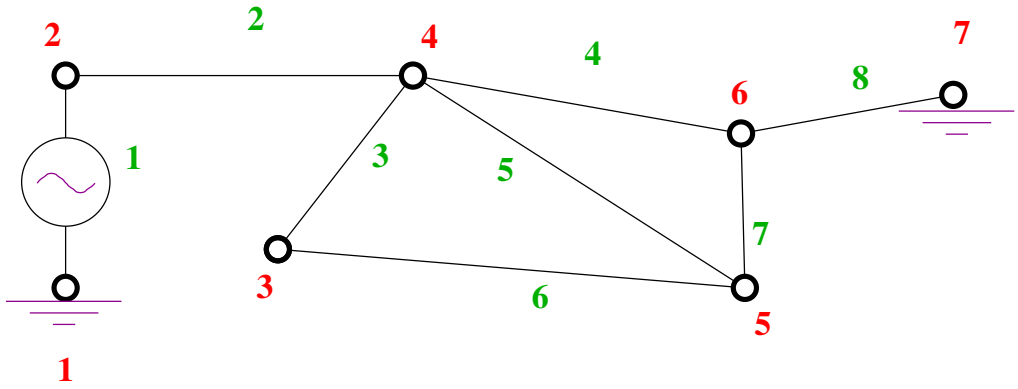
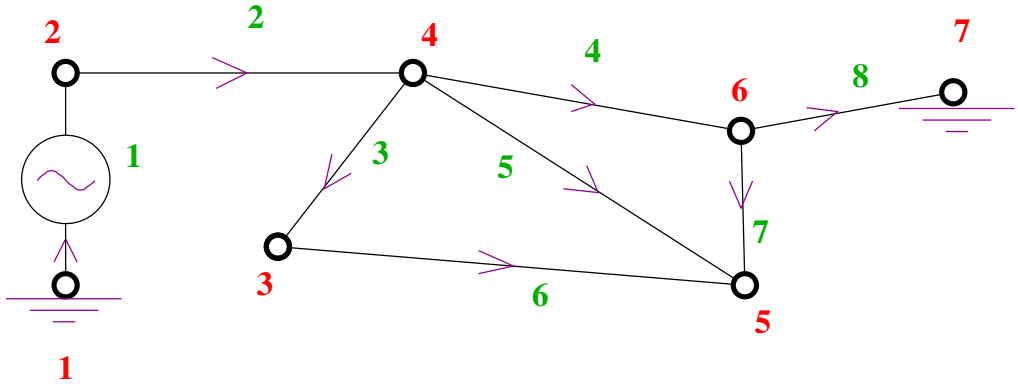
Circuitos elétricos



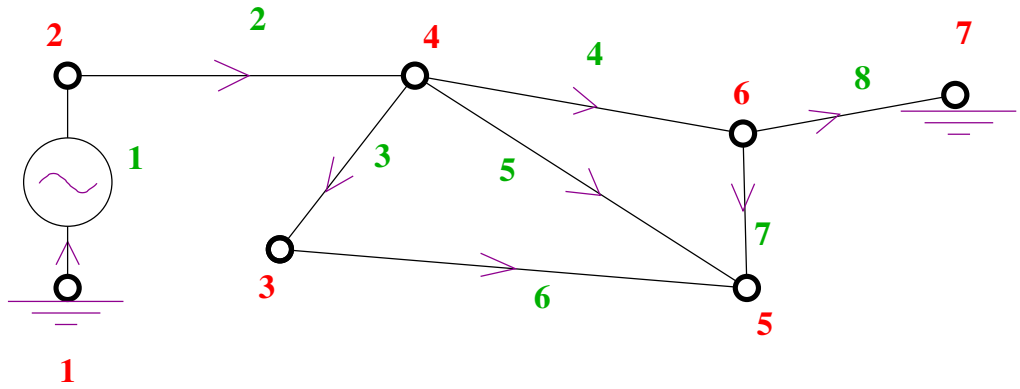
A rede da figura está composta por $m = 8$ **arestas** e $n = 7$ **nós**. Uma vez numerados os componentes, resulta um **grafo** cuja representação pode ser feita por uma **matriz de incidência** J $(m \times n)$. Notar que se introduz uma **orientação**.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



Outra representação é a **lista de arestas** C, e outra é a **matriz de adjacência** A, na qual $A_{ij} = 1$ se i é conectado a j (em geral não identifica orientação, pode se assumir i conectado com i ou não).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 5 \\ 6 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



- **Conservação da carga:** Requer que em cada junção a soma de todas as correntes saintes seja zero.

$$\sum_{k\to\ell} i_{k\to\ell} = 0\,, \qquad \text{e.g.,} \qquad -i_2 + i_3 + i_5 + i_4 = 0\,.$$

- **Lei de Ohm:** Requer que, em cada aresta, o produto da impedância pela corrente seja igual à diferença de tensão.

$$\Delta v = Z\,i\,, \qquad \text{e.g.,} \qquad v_3 - v_5 = Z_6\,i_6\,.$$

- Seja v o vetor (coluna) que contém as voltagens em cada nó.

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T$$

- Calculemos o produto $J\,v$:

$$J\,v = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 - v_4 \\ v_4 - v_3 \\ v_4 - v_6 \\ v_4 - v_5 \\ v_3 - v_5 \\ v_6 - v_5 \\ v_6 - v_7 \end{pmatrix}$$

$J\,v$ é um vetor que, para cada aresta, contém a diferença de voltagem entre os nós de entrada e de saida (origem e ponta da flecha).

- Se define o vetor de correntes da rede, $i = (i_1, \ldots, i_8)^T$, e o vetor $G(i)$ dado por

$$G_k(i) = -Z_k\, i_k\ .$$

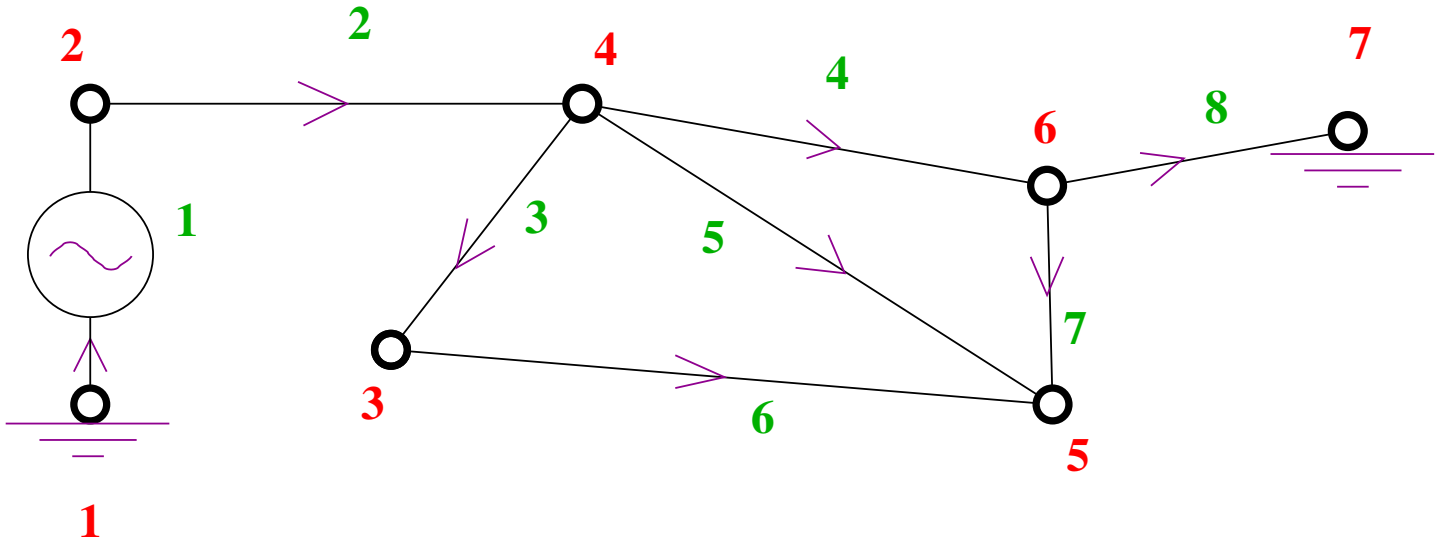
- A **lei de Ohm** se escreve, assim,

$$J\,v + G(i) = 0 \qquad \leftarrow \qquad \text{lei de Ohm}$$

- O produto $J\,v$ se programa facilmente com a matriz de conectividade:

```
for k=1:m ## m: nro. de arestas
  Jv(k)=v(co(k,1))-v(co(k,2));
endfor
```

e $G(i)$ é simplesmente "`G=Z.*ii`"



- Calculando o produto $J^T i$ se obtém

$$J^T i = \begin{pmatrix} i_1 \\ -i_1 + i_2 \\ -i_3 + i_6 \\ -i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \\ -i_5 - i_6 - i_7 \\ -i_4 + i_7 + i_8 \\ -i_8 \end{pmatrix}$$

- A **conservação da carga** se escreve, portanto,

$$J^T i = c \qquad \leftarrow \qquad \text{cons. da carga}$$

onde c é o vetor de **correntes entrantes** (positivas entrando desde o exterior da rede) em cada nó.

- O produto $J^T i$ se programa facilmente com a matriz de conectividade:

```
JTii=zeros(n,1); ## n: nro de nos
for k=1:m ## m: nro. de arestas
  k1=co(k,1); k2=co(k,2);
  JTii(k1)=JTii(k1)+ii(k);
  JTii(k2)=JTii(k2)-ii(k);
endfor
```

Sistema de equações e incógnitas

- **Se não houver nenhuma conexão a terra** (apenas correntes nodais c impostas), o sistema acabaria nas equações já apresentadas.

$$\begin{aligned} J\,v + G(i) &= 0 \\ J^T\,i &= c \end{aligned}$$

- O sistema seria quadrado, mas a solução não seria única.
- Mostrar que
  - se (v, i) é solução de (lei de Ohm)-(cons. da carga), então $(v + \alpha\mathbf{1}, i)$ também é solução, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é arbitrário e $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$;
  - se $c^T\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{m} c_i$ é distinto de zero, o sistema não admite nenhuma solução.
- As observações do exercício surgem naturalmente da análise física do problema.

- **Havendo nt conexões a terra**, a situação é diferente. Em particular, do vetor c haverá nt componentes que serão **incógnitas**.
- Seja $\{T(r)\}_{r=1}^{nt}$ um vetor que contém os índices de nó que correspondem a conexões a terra ($v = 0$). Na rede da figura seria

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Definindo a matriz auxiliar **de injeção** $D \in \mathbb{R}^{n \times nt}$, cuja coluna r é a coluna $T(r)$ da matriz identidade $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumpre no nosso caso que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T v = \begin{pmatrix} v(T(1)) \\ \dots \\ v(T(nt)))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_7 \end{pmatrix} .$$

- Assim, as **equações de imposição de** v nos nós aterrados se escrevem matemáticamente,

$$D^T v = 0\,, \quad \text{no caso,} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Decompomos o vetor $c = c^L + c^A$, onde $c^L = 0$ nos nós aterrados e c^L é dado nos nós livres. Analogamente, c^A é zero nos nós livres e **incógnita** nos nós aterrados. Escrevendo essas nt incógnitas num vetor i^A (de $nt \times 1$) segundo

$$i^A(k) = c^A(T(k))\,,$$

as equações de **conservação da carga** se escrevem

$$J^T i - D\, i^A = c^L\,.$$

- O **sistema total** a resolver é: Achar $(i, v, i^A) \in \mathbb{R}^{m+n+nt}$ tais que

$$\begin{aligned} G(i) + J\,v &= 0 \quad \leftarrow \; m \text{ eqs} \\ J^T\,i - D\,i^A &= c^L \quad \leftarrow \; n \text{ eqs} \\ D^T\,v &= 0 \quad \leftarrow \; nt \text{ eqs} \end{aligned}$$

- Os dados são as correntes de entrada nos nós livres c^L (típicamente zero se não há fontes de corrente ou consumos), e a lista de nós aterrados T.

Implementação

- Levamos o problema à forma: Determinar $x^* \in \mathbb{R}^{m+n+nt}$ tal que

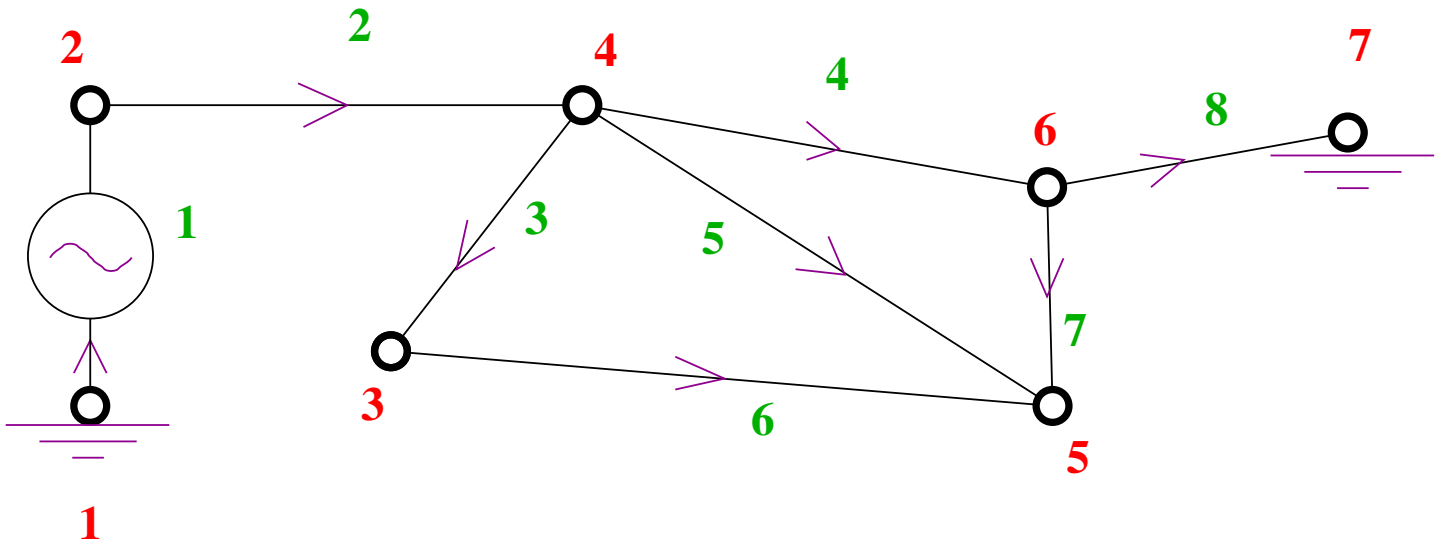
$$f(x^*) = 0, \text{ onde } x \in \begin{pmatrix} i \\ v \\ i^A \end{pmatrix} \text{ e } f(x) = \begin{pmatrix} G(i) + Jv \\ J^T i - Di^A - c^L \\ D^T v \end{pmatrix}$$

- Utilizaremos para isto a função `fsolve`:

```
Function File: fsolve (FCN, X0, OPTIONS)
[X, FVEC, INFO, OUTPUT, FJAC] = fsolve (FCN, ...)
--------------------Exemplo-----------------------
function y = f (x)
  y(1,1) = -2*x(1)^2 + 3*x(1)*x(2)   + 4*sin(x(2)) - 6;
  y(2,1) =  3*x(1)^2 - 2*x(1)*x(2)^2 + 3*cos(x(1)) + 4;
endfunction
[x, fval, info] = fsolve (@f, [1; 2])
x = 0.57983 2.54621 ** fval = -5.7184e-10 5.5460e-10
info = 1
```

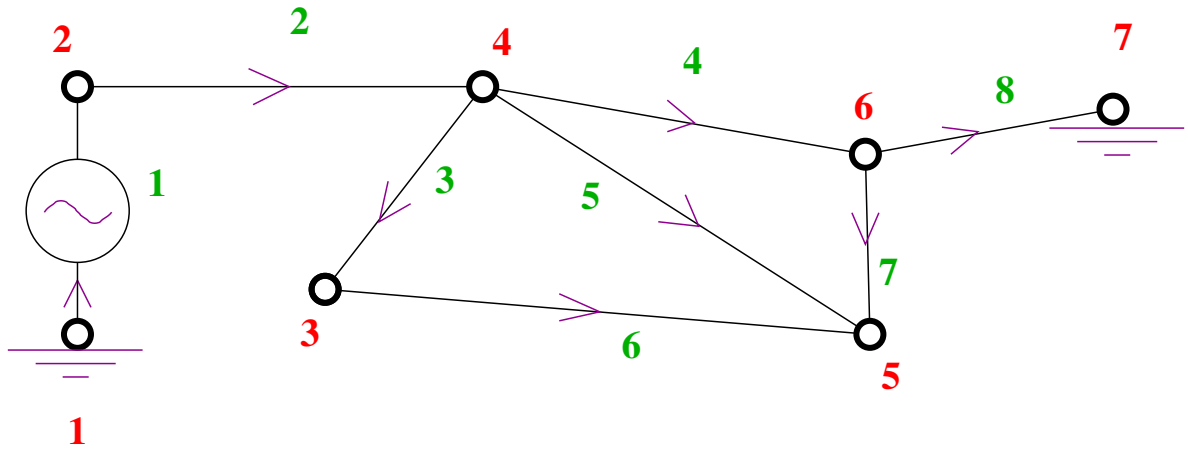
- Precisamos programar o resíduo. $f(x) = \begin{pmatrix} G(i) + J\,v \\ J^T i - D i^A - c^L \\ -D^T v \end{pmatrix}$

```
function fx = felet(x)
global m n nt co T cL
ii=x(1:m); v=x(m+1:m+n); iA=x(m+n+1:m+n+nt);
fx=zeros(m+n+nt,1); fx(m+1:m+n)=-cL; ## inic. fx
dv=deltav(ii);                ## funcao G(i)
for k=1:m
 n1=co(k,1); n2=co(k,2);    ## co==conectividade
 fx(k)=dv(k)+v(n1)-v(n2);   ## lei de Ohm
 fx(m+n1)=fx(m+n1)+ii(k);    ## eq. de carga
 fx(m+n2)=fx(m+n2)-ii(k);    ## eq. de carga
endfor
for k=1:nt
 fx(m+T(k))=fx(m+T(k))-iA(k); ## eq. de carga
 fx(m+n+k)=-v(T(k));      ## eq. impos. terra
endfor
endfunction
```




```
global m n nt co T cL ome
m=8;n=7;nt=2;co=[1 2;2 4;4 3;4 6;4 5;3 5;6 5;6 7];
T=[1 7];cL=zeros(n,1);
```

- Só nos resta programar a função $G(i)$ (`deltav`), que vale para cada aresta relacionando Δv e i!



```
function g = deltav(ii)
global m n ome
v0=1.0; RR= 100*[0 1 1 1 1 1 1 1];
LL=1e-4*[0 1 1 1 1 1 1 1]; CC=1e-6*[0 1 1 1 1 1 1 1];
for k=1:m
 if (k!=1)
  Z(k)=RR(k); ##para testar, sem reactancia
  g(k)=-Z(k)*ii(k);
 else
  g(k)=v0;
 endif
endfor
```

- Com isto, já podemos calcular o resíduo

```
ii=0*ones(m,1);
v=0*ones(n,1);
iA=0*ones(nt,1);
x0=[ii;v;iA]; ##residuo de x=0
res=felet(x0)

>>res=   1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

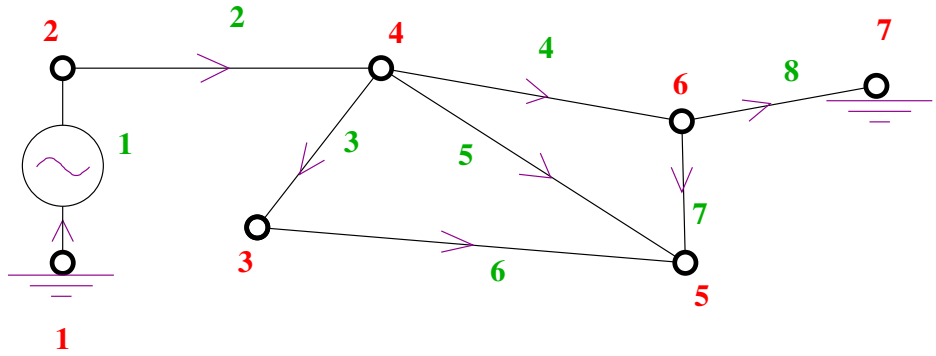
onde as primeiras 8 componentes são resíduos na lei de Ohm nas arestas, os seguintes 7 desbalanços de carga nos nós, e os últimos 2 resíduos na satisfação de $v = 0$ nos nós aterrados.

- Finalmente, podemos utilizar `fsolve` para resolver.

```
[x fv info]=fsolve(@felet,x0)


 x =
   0.00381 0.00381 0.00048 0.00238 0.00095 0.00048
  -0.00143 0.00381
   0.00000 1.00000 0.57143 0.61905 0.52381 0.38095
   0.00000
   0.00381 -0.00381
fv =
  -5.8553e-13  4.4409e-16  0.0000e+00  3.3307e-16
  -5.5511e-16 -1.1102e-16 -6.6847e-13  4.9962e-16
  -5.1174e-17 -5.0307e-17  5.4210e-19 -8.2399e-18
   2.1684e-18  7.8063e-18  1.7347e-18
  -0.0000e+00  1.7750e-20
info = 1
```

Desenvolvida em `elet2.m` (ver site)




```
v0=1.0; RR= 100*[0 1 0 10 0 0 0 1];
LL=1e-3*[0 0 10 10 20 0 40 0];
CC=1e-6*[0 1e10 1 1e10 1e10 1 10 1e10];
```

```
k=1:320; om=100*((2.0)^(1/32)).^k; sol=[];
x0=zeros(m+n+nt,1);
for jom=1:length(om)
 ome=om(jom);
 [x fval info]=fsolve(@felet2,x0);
 sol=[sol,x]; x0=x;
endfor
ii=sol(1:m,:);
v=sol(m+1:m+n,:);
iA=sol(m+n+1:m+n+nt,:);
```

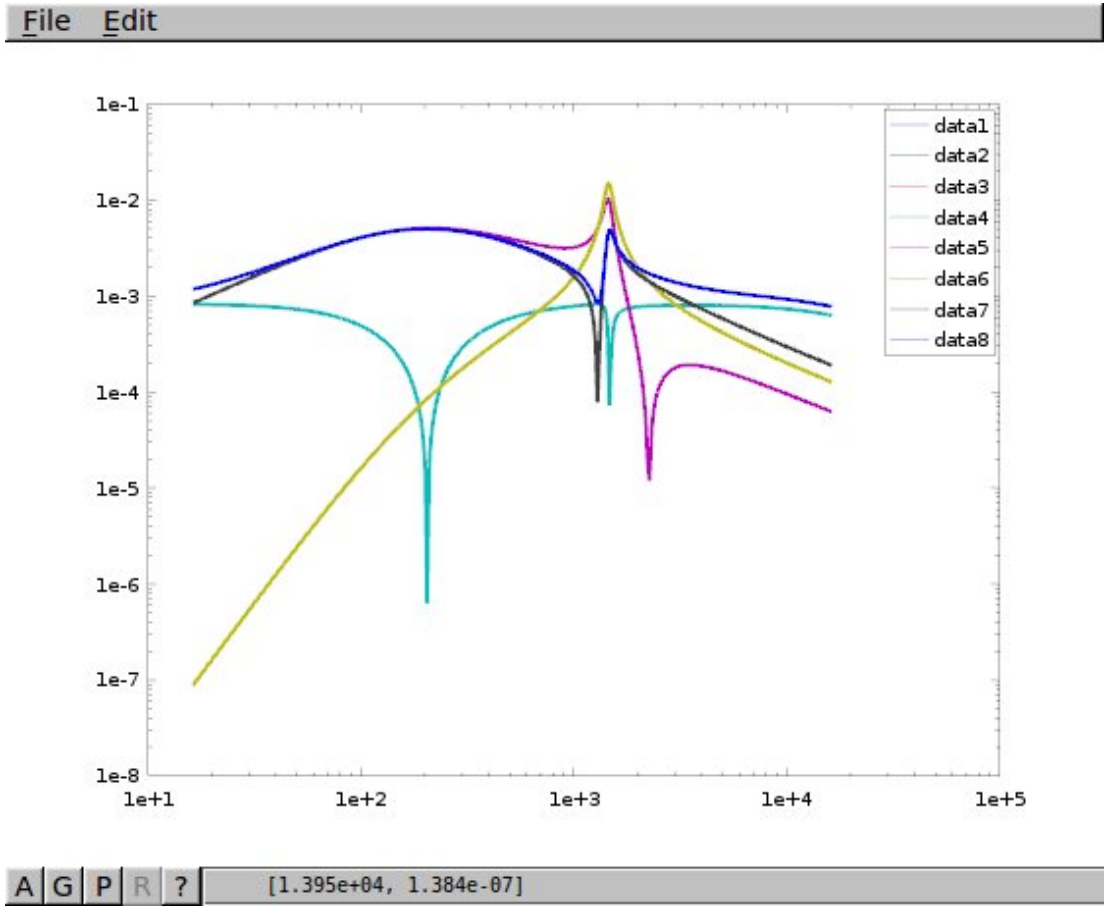


Gráfico de `abs(ii(1:8,:))` vs. `om`.

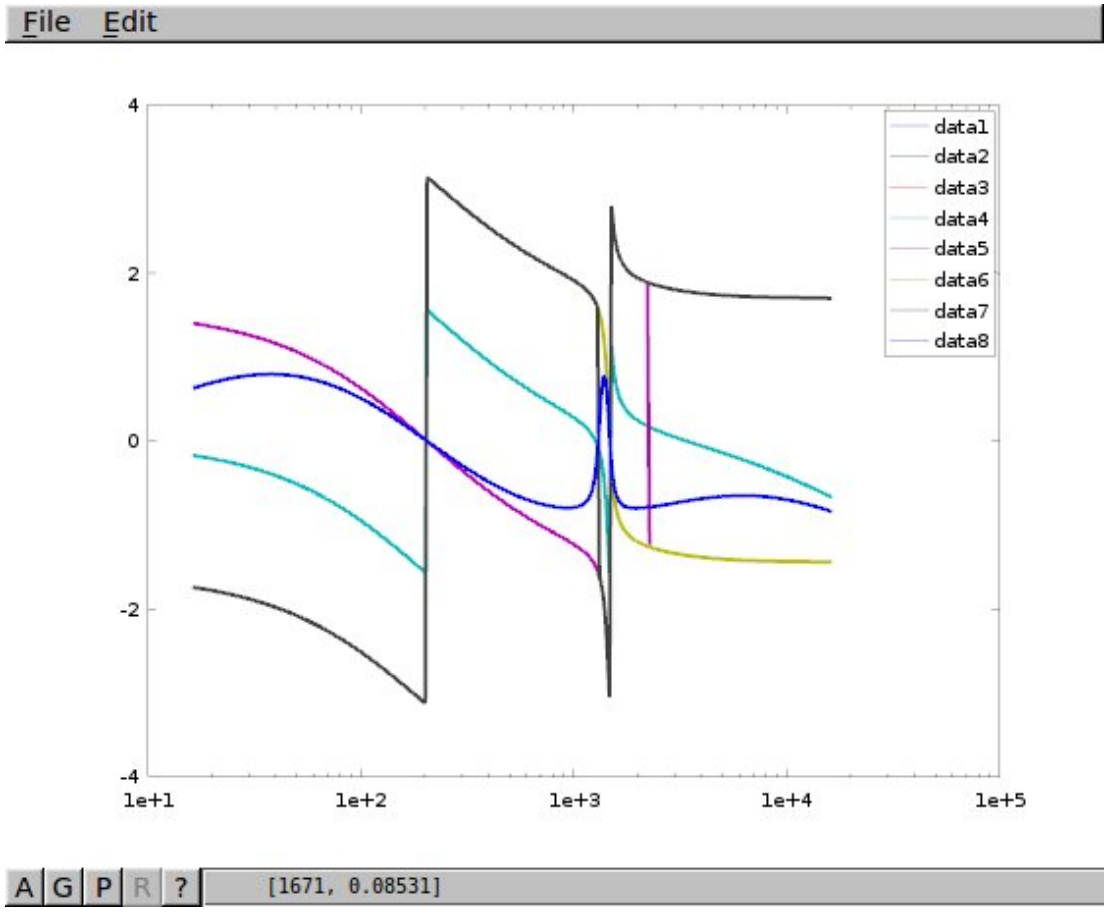


Gráfico de `angle(ii(1:8,:))` vs. `om`.

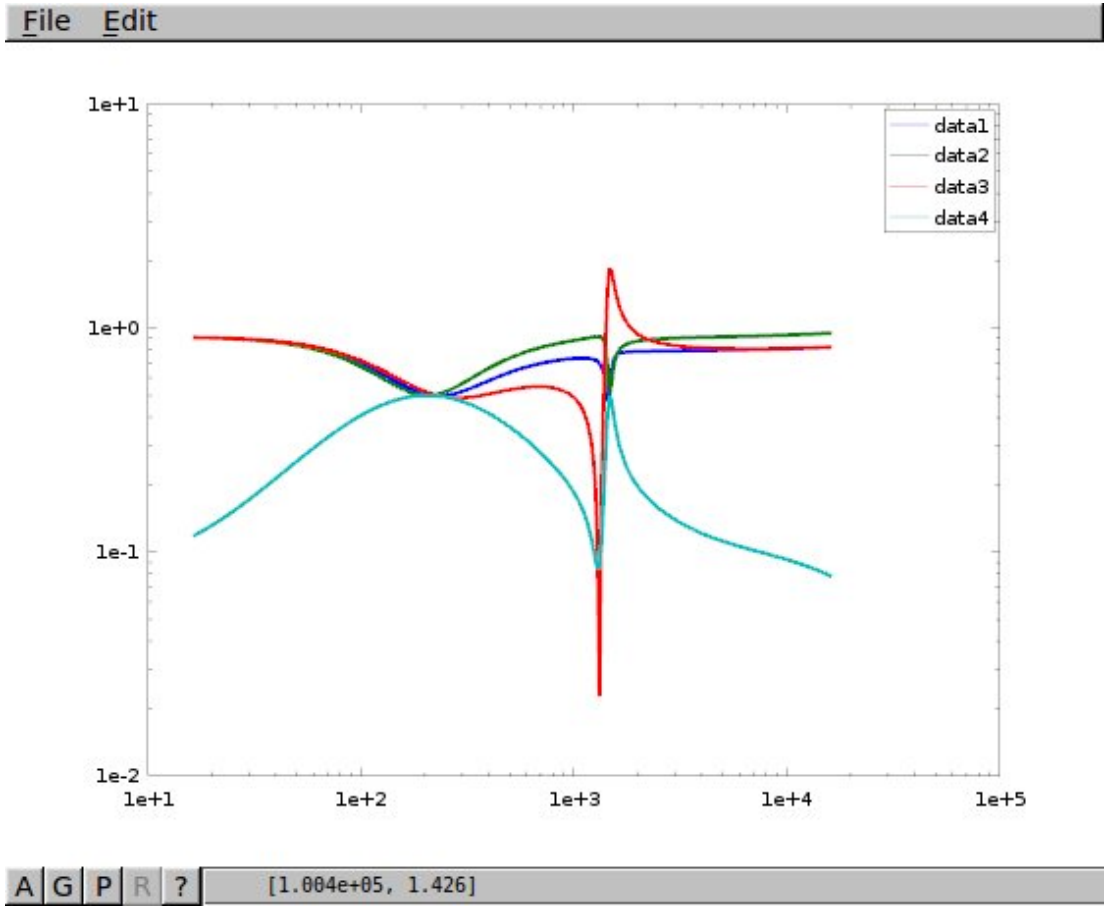


Gráfico de `abs(v(3:6,:))` vs. `om`.

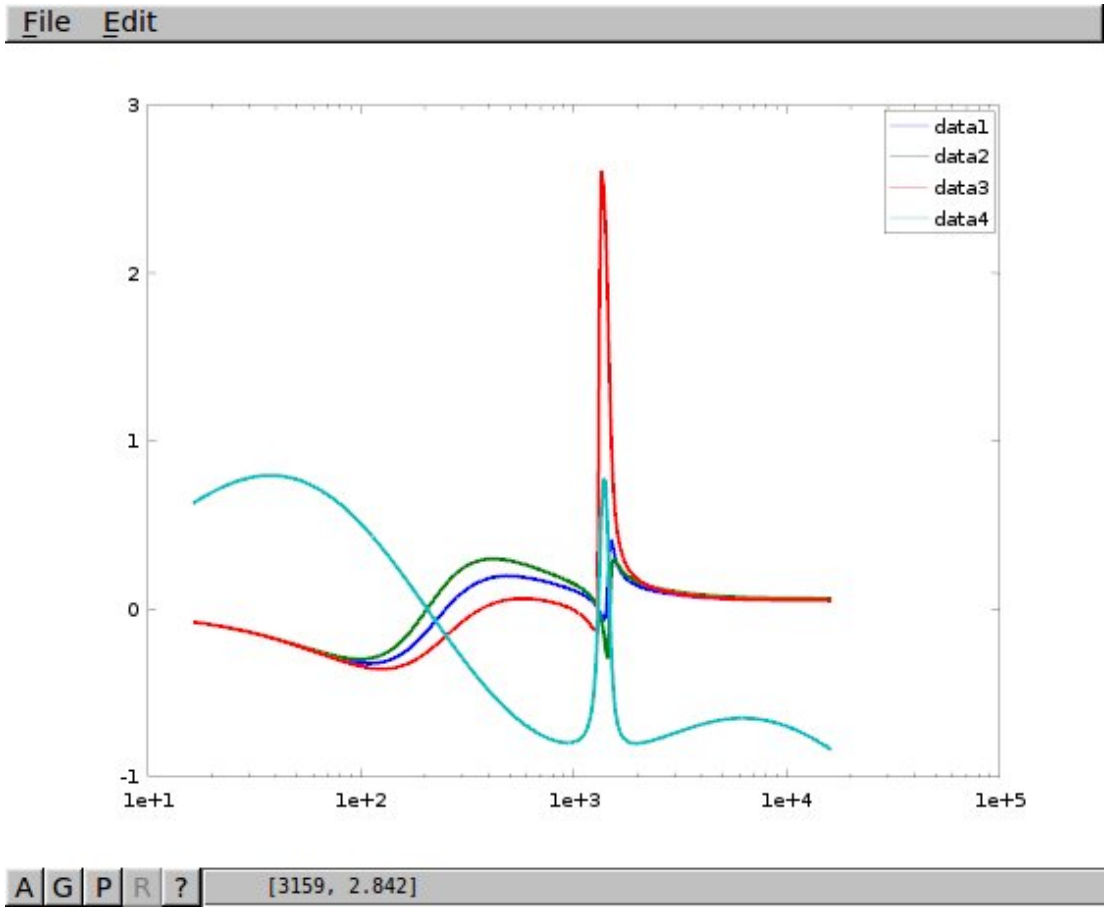
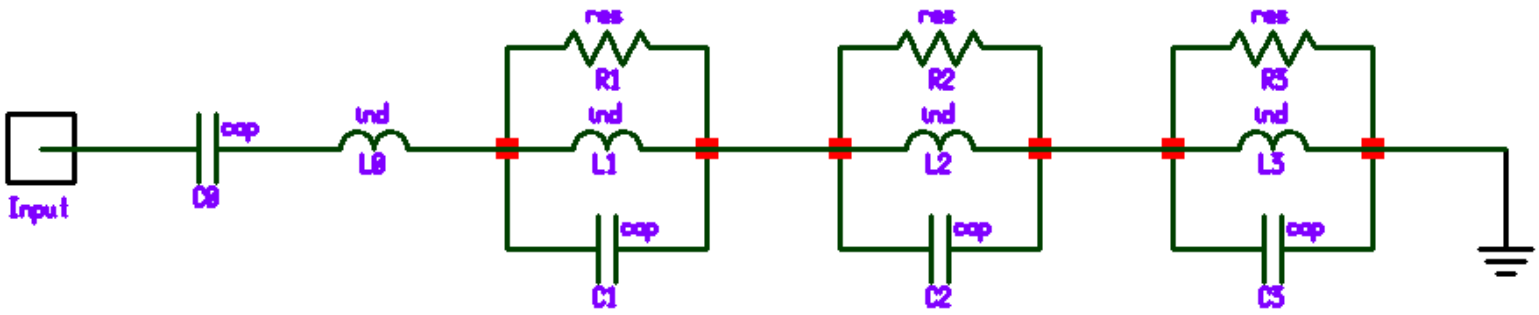


Gráfico de `angle(v(3:6,:))` vs. `om`.

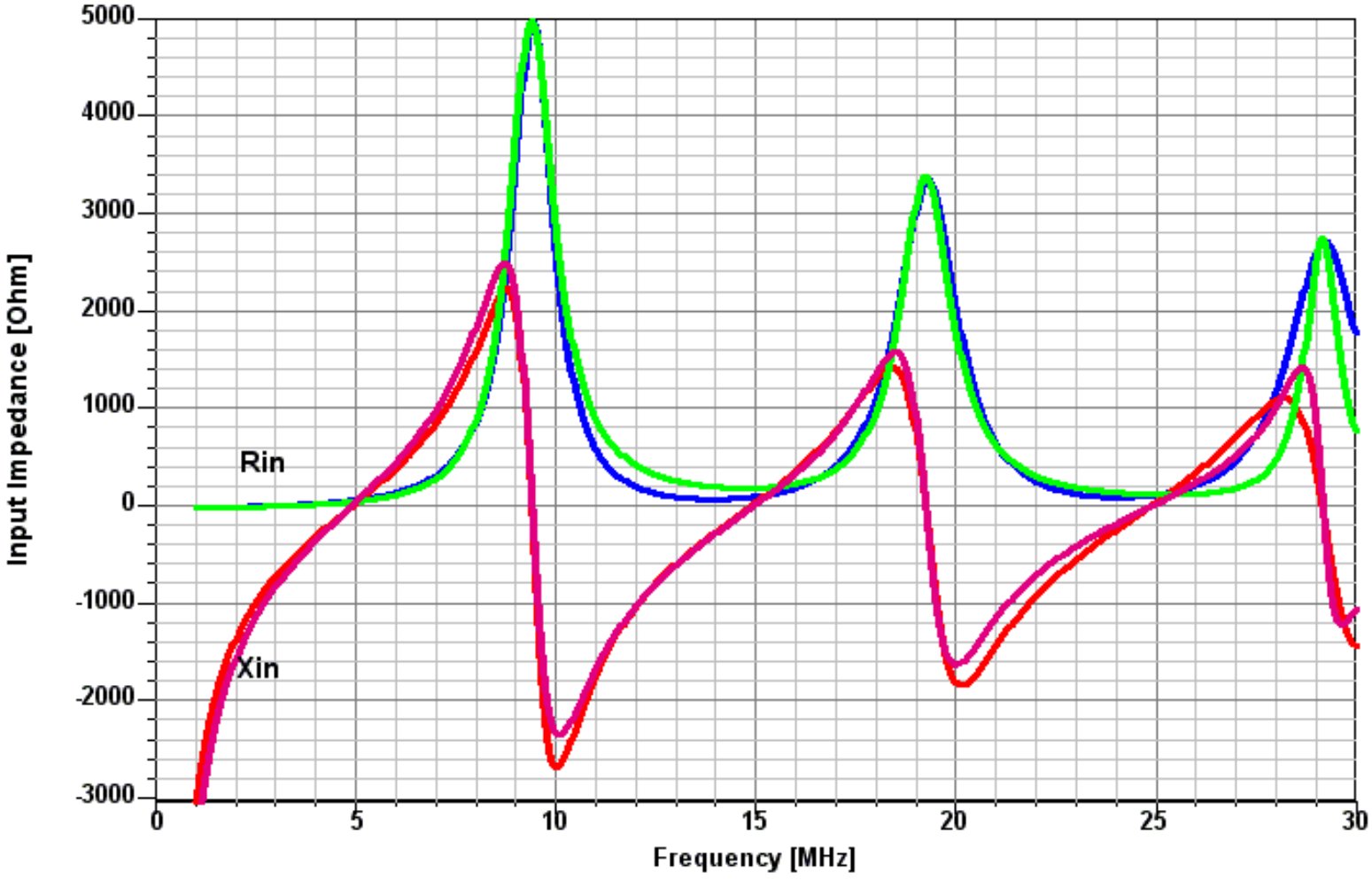
Hamid & Hamid's Broadband Equivalent Circuit (1997)

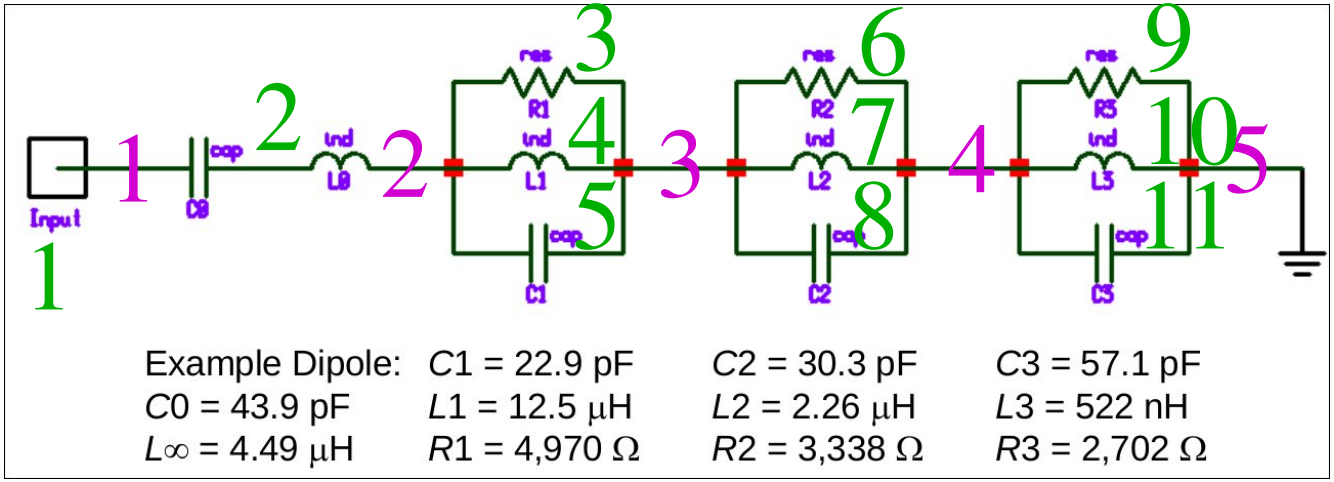


Example Dipole: $C1 = 22.9$ pF $C2 = 30.3$ pF $C3 = 57.1$ pF
$C0 = 43.9$ pF $L1 = 12.5\ \mu$H $L2 = 2.26\ \mu$H $L3 = 522$ nH
$L\infty = 4.49\ \mu$H $R1 = 4{,}970\ \Omega$ $R2 = 3{,}338\ \Omega$ $R3 = 2{,}702\ \Omega$

- ***Foster's 1st canonical form with small losses added***
- ***Fits dipole impedance best near antiresonances***
- ***Reference: Ramo, Whinnery, and Van Duzer, Fields and Waves in Communication Electronics, Wiley, 1965, Section 11.13***

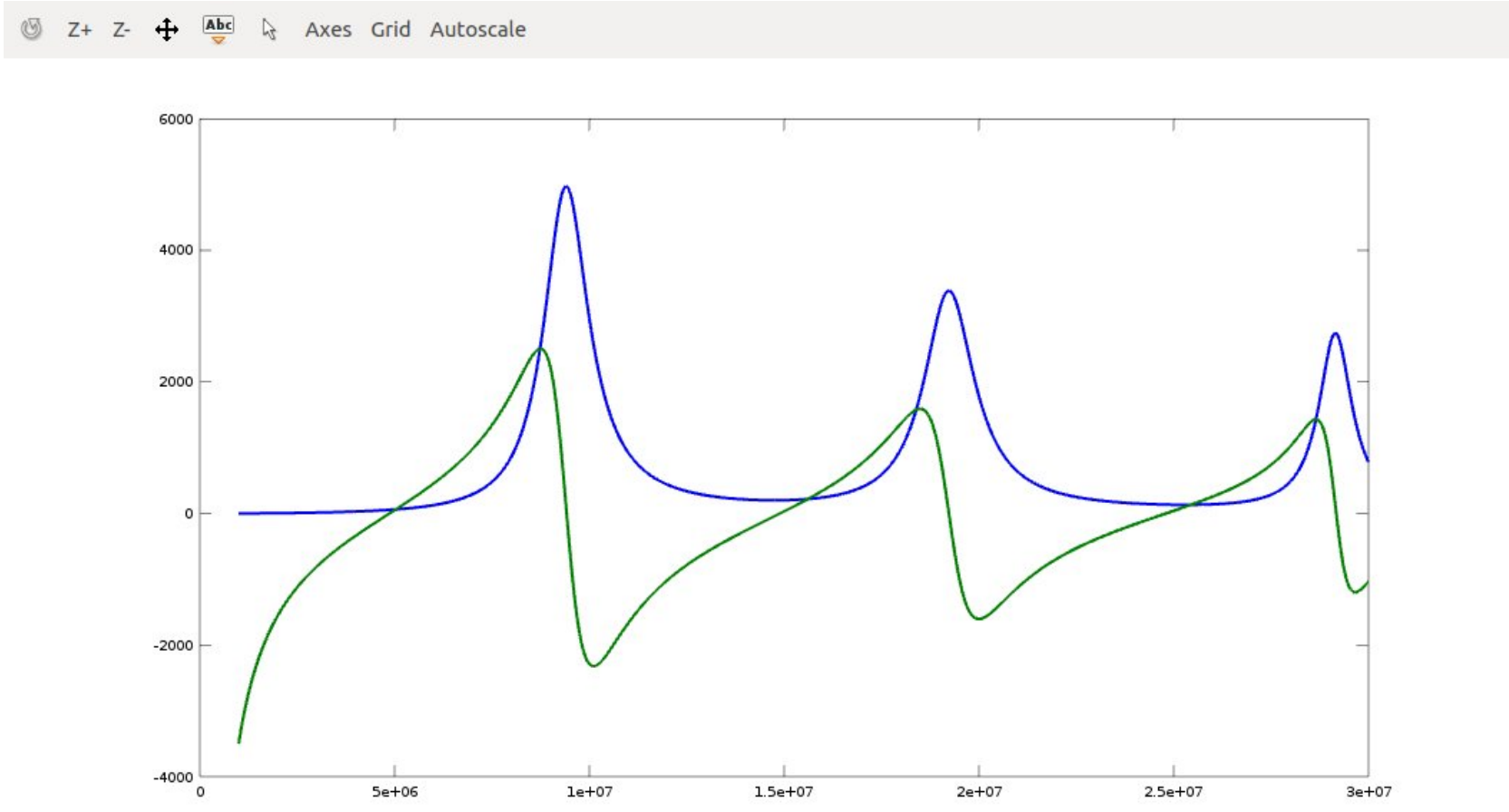
Accuracy of Hamid & Hamid's Equivalent Circuit






```
m=11;n=5;nt=1;
co=[5 1;1 2;2 3;2 3;2 3;3 4;3 4;3 4;4 5;4 5;4 5];
v0=1.0; big=1e12;
RR= 1e3*[0 0 4.97 0 0 3.338 0 0 2.702 0 0];
LL=1e-6*[0 4.49 0 12.5 0 0 2.26 0 0 0.522 0];
CC=1e-12*[0 43.9 big big 22.9 big big 30.3 big big 57.1];
```

Desenvolvido em `elet3.m` (ver site)



Conclusões sobre cálculo de redes elétricas

- Utilizando grafos orientados, e em particular a matriz de incidência J e a matriz de injeção D, é possível escrever as equações físicas dos circuitos elétricos como um **sistema de equações algébricas linear**.
- A implementação eficiente permite automatizar o cálculo de qualquer circuito.
- É possível resolver o sistema algébrico com a função `fsolve` de Octave, apenas programando a função resíduo.