

Lista - Métodos diretos para resolver sistemas lineares

1. Ler o capítulo 5 do livro de Quarteroni, páginas 137 até 158.
2. Ler os slides do Prof. Afonso Paiva Neto.
3. *Miniprojeto computacional*: As equações das redes elétricas podem ser escritas como um sistema linear $Mx = b$, onde x e b são de dimensão $m + n + nt$. Escreva um código que calcule M e b . Resolva ($x=M \backslash b$;) e compare com o resultado do código `elet.m`.
4. Escrever em Octave um código que gere matrizes triangulares inferiores unitárias (i.e., $l_{ii} = 1 \forall i, l_{ij} = 0 \forall i < j$), cujos elementos l_{ij} , $j < i$ sejam aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1.
5. Verificar em exemplos que a inversa de uma matriz triangular inferior (respectivamente, superior) também é triangular inferior (respectivamente, superior).
6. Provar matematicamente que, sendo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a inversa tem a mesma forma, mas com os l_{ij} trocados de sinal.

7. Uma *permutação* das equações de um sistema linear $Ax = b$ é um novo sistema $Cx = d$ de tal maneira que a “nova” equação número i seja a “antiga” equação número $p(i)$ (ou p_i). O vetor p é uma permutação do vetor $(1, 2, \dots, n)$. Escrito com índices,

$$C_{i,j} = A_{p(i),j}, \quad d_i = b_{p(i)}.$$

Determine a única matriz P tal que $C = PA$. Comparar com

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = p(i) \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

Comparar com uma matriz obtida permutando as linhas da matriz identidade (nova linha i = antiga linha $p(i)$).

8. Provar que $P^{-1} = P^T$.
9. A função `lu` de Octave calcula a decomposição LU com pivotamento parcial, da forma

$$[L \ U \ P] = \text{lu}(A) \Leftrightarrow LU = PA$$

Quando chamada em forma abreviada `[R S]=lu(A)` ela devolve $R = P^{-1}L$ e $S = U$. Verificar isto no Octave com matrizes aleatórias.

10. Seja `lu_decomp` a função de Octave vista nos slides, que calcula a fatoração LU de uma matriz **sem realizar pivotamento**.

Sejam `[l1,u1]=lu_decomp(a)` e `[l2,u2,p]=lu(a)`. Dizer se verdadeiro ou falso:

- (a) `l1*u1` dá por resultado `a`.
- (b) `l2*u2` dá por resultado `a`.
- (c) `p*l2*u2` dá por resultado `a`.
- (d) `p'*l2*u2` dá por resultado `a`.
- (e) `l2` é igual a `l1`.
- (f) `u2` é igual a `u1`.

11. Considere matrizes quadradas de $n \times n$.

- (a) Como se calcula o determinante de matrizes triangulares inferiores ou triangulares superiores?
- (b) Tendo a decomposição LU de uma matriz A e conhecendo as propriedades dos determinantes, como calcularia o determinante de A ?
- (c) Que acontece no caso anterior se o que temos é a decomposição LU de PA (`[l,u,p]=lu(a)`)?

12. Responder com verdadeiro ou falso:

- (a) Para um sistema de equações $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que admite solução única se verifica que as linhas de A são linearmente dependentes.
- (b) Para um sistema de equações $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que admite solução única se verifica que $Ax = 0$ só se $x = 0$.
- (c) Se premultiplicar (ou seja, multiplicar a esquerda) uma matriz A por uma matriz de permutação P , então o resultado será uma matriz com as mesmas linhas que A , mas numa ordem diferente.
- (d) Uma matriz obtida trocando a ordem apenas de duas linhas da matriz identidade, é uma matriz de permutação simétrica.
- (e) Conhecida a fatoração LU de A (`[l,u]=lu(a)`), podemos calcular o determinante dela como $\det(A) = \det(L)$.
- (f) Uma vez calculada a fatoração LU de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o determinante dela pode ser calculado fazendo

```
for i=1:n
    det=1;
    det=det*U(i,i);
end
```

- (g) O custo computacional de calcular o produto escalar de dois vetores é da ordem $\mathcal{O}(n^2)$.
- (h) O custo computacional de calcular o produto de uma matriz por um vetor é da ordem $\mathcal{O}(n^3)$.

- (i) O custo computacional de calcular a fatoração LU de uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é proporcional n^3 .
- (j) O custo computacional de aplicar o método de substituição progressiva (Forward substitution) para resolver um sistema triangular inferior de $n \times n$ é proporcional a n .
- (k) Uma vez obtida a fatoração LU de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para resolver qualquer sistema da forma

$$A x = b$$

são necessárias $\mathcal{O}(n)$ operações.

- (l) O pivotamento ajuda na precisão reduzindo o erro de arredondamento.
- (m) Sabemos que na fatoração LU com pivotamento, são calculadas matrizes P , L e U tais que $PA = LU$ sendo a matriz de permutação P sempre simétrica.
- (n) Toda matriz não singular admite ser fatorada como $PA = LU$.
- (o) Toda matriz não singular admite ser fatorada como $A = LU$.
- (p) Sabemos que na fatoração LU com pivotamento, são calculadas matrizes P , L e U tais que $PA = LU$. Ainda, os elementos da matriz de permutação P são 0 ou 1.
- (q) Se uma matriz tem determinante negativo, então ela não pode ser fatorada da forma

$$A = H H^T$$

- (r) O custo computacional de calcular a fatoração de Cholesky para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é proporcional a n^3 (i.e., $\#flops \sim Cn^3$). Essa constante C é menor que no caso da fatoração LU .
- (s) A decomposição de Cholesky pode ser aplicada a qualquer matriz simétrica.
- (t) Se, num dado computador, resolver por eliminação de Gauss uma matriz (cheia) 100×100 demora 1 segundo. Então para uma matriz 1000×1000 demorará aproximadamente 1000 segundos.
- (u) Se já foram computados os fatores L e U de A (cheia, $n \times n$), então calcular x tal que $Ax = b$ demora, num dado computador, 5 segundos quando $n = 1000$. Quando $n = 10000$ demorará 500 segundos.