SME0602 - 2017

Gustavo Buscaglia

Lista - Cálculo numérico de autovalores

Material complementar de estudo: Slides do prof. Afonso Paiva.

Lembrete: Chamamos de "aplicar o método das potências à matriz B" a iterar até a convergência o algoritmo

- Dado $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$, $\eta^{(0)} = {y^{(0)}}^T B\, y^{(0)}$
- **for** $k = 1, 2, \ldots$
  - $x^{(k)} = B\, y^{(k-1)}$
  - $y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$
  - $\eta^{(k)} = {y^{(k)}}^T B\, y^{(k)}$
  - Se $|\eta^{(k)} - \eta^{(k-1)}| < TOL\, |\eta^{(k)}| \;\Rightarrow\;$ Sair
- **end for**
- **return** $\eta = \eta^{(k)}$

O resultado é o autovalor de B mais afastado da origem.

---

1. Para diferentes valores de `n`, gerar matrizes `M` em Octave usando as seguintes intruções:

   - `A = rand(n,n);`
   - `B = A'*A;`
   - `[Q, R] = qr(B);`
   - `d = [1:n];`
   - `D = diag(d);`
   - `M = Q'*D*Q;`

   e usando a instrucção

   `[V, LAMBDA] = eig(M)`

   Calcular os autovetores e autovalores. A funcção `eig` devolve uma matriz `V` cujas colunas são os autovetores e uma matriz `LAMBDA` diagonal com os autovalores.

   (a) Verificar que os autovetores são ortogonais.

   (b) Verificar que os autovalores são exatamente os números `1,2,...,n`.

   (c) Medir o tempo de cálculo como função do tamanho da matriz.

   (d) Mudar na mão o vetor `d` para que apareçam entradas repetidas. Calcular novamente os autovalores e autovetores e verificar se os autovetores asociados ao autovalor repetido são ortogonais entre eles.

2. Como são os autovalores de uma matriz triangular? Porquê?

3. Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, satisfazendo $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ sempre que $i \neq j$. Suponha os autovalores ordenados de maneira que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Os correspondentes autovetores são $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, etc., são normalizados na norma euclidiana ($\|z\| = \sqrt{z^T z}$). Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) A matriz A é diagonalizável.

   (b) A matriz $A - \lambda_1 I$ é diagonalizável.

   (c) O método das potências aplicado à matriz A^{-1} dá por resultado $\eta = 1/\lambda_n$.

   (d) O método das potências aplicado à matriz A convergirá mais rápido quanto menor seja o cociente $|\lambda_2/\lambda_1|$.

   (e) O método das potências, com $B = A$, convergirá mais rapidamente que com $B = A^2$.

   (f) A matriz $A - \lambda_1 I$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, ..., $\lambda_n - \lambda_1$.

4. Seja A uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = A - 3\, I$, a sequência dos $\eta^{(k)}$ convergirá para:

   (a) 1

   (b) 3

   (c) -1

   (d) -2

   (e) $1/3$

   (f) $-1/2$

   (g) 0

   (h) Não convergirá

5. Seja A uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = (A + 2\, I)^{-1}$, a sequência dos $\eta^{(k)}$ convergirá para:

   (a) 1

   (b) $1/2$

   (c) $-1/2$

   (d) $1/4$

   (e) $1/3$

   (f) $1/6$

   (g) $-1/5$

   (h) Não convergirá

6. Seja A uma matriz $n \times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = (A - 0.2\, I)^{-1}$, a sequência dos $\eta^{(k)}$ converge para 5. Então é possível concluir que:

   (a) 5 é autovalor de A.

   (b) $1/5$ é autovalor de A.

   (c) $2/5$ é autovalor de A.

(d) 0 é autovalor de A.

(e) A não tem autovalores positivos menores que $1/5$.

(f) A não tem autovalores positivos menores que $2/5$.

(g) A não tem autovalores positivos menores que $4/5$.

---

7. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja I a matriz identidade $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) Se v é autovetor de A (matriz com determinante não zero), então $w = A\,v$ é autovetor de A^{-1}.

   (b) Se v é autovetor de A (matriz com determinante não zero), então $w = A^{-1}\,v$ é autovetor de A^{-1}.

   (c) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A e A^{-1} existe, então $-\lambda$ é autovalor de A^{-1}.

   (d) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A, suposta diagonalizável, então λ é autovalor de A^T.

   (e) Se v é autovetor de A e A^{-1} existe, então v é também autovetor de A^{-1}.

8. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) Se $A\,v = B\,v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então $A = B$.

   (b) Para que $A\,v = B\,v$ se cumpra para todo $v \in \mathbb{R}^n$, é necessário que as matrizes A e B sejam iguais.

   (c) Se $AB = BA$ e v é autovetor de B, então $A\,v$ também é autovetor de B.

9. *Lembrete:* Dada uma matriz A quadrada diagonalizável, o comando de Octave
   `[S,D]=eig(A)`
   calcula matrizes S (não singular) e D (diagonal) tais que $A = S\ D\ S^{-1}$.

   Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) As linhas de S são autovetores de A.

   (b) As colunas de S são autovetores de A.

   (c) As colunas de S^{-1} são autovetores de A.

   (d) A instrução seguinte terá por resultado um vetor constante:
   `(A*S(:,1))./S(:,1)`
   e o valor das componentes será `D(1,1)`.

   (e) O vetor resultado de
   `(A*S(:,4))/D(4,4)`
   será igual a `S(:,4)`.

   (f) Quando A é simétrica, S é ortogonal.

   (g) Quando A é simétrica, S é simétrica.

   (h) A matriz $A^T A$ é simétrica.

   (i) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A+A')
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento).

   (j) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A*A')
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento).

   (k) Fazendo
   ```
   > [SS,DD]=eig(A'*A)
   > BB = SS'*SS
   ```
   o resultado será uma matriz `BB` igual à matriz identidade (a menos do erro de arredondamento).

10. Seja $A^{(0)}$ uma matriz $n \times n$ simétrica, cuja fatoração QR é

$$A^{(0)} = Q^{(0)}\ R^{(0)}\ .$$

De acordo com o método iterativo de Rutishauser-Francis a próxima matriz é

$$A^{(1)} = R^{(0)}\ Q^{(0)}$$

Supondo que (λ, v) seja um par autovalor-autovetor de $A^{(0)}$, dizer se verdadeiro ou falso (no caso geral, não para alguma matriz em particular):

   (a) λ é autovalor de $A^{(1)}$.

   (b) λ é autovalor de $Q^{(0)}$.

   (c) λ é autovalor de $R^{(0)}$.

   (d) v é autovetor de $A^{(1)}$.

   (e) $Q^{(0)}\ v$ é autovetor de $A^{(1)}$.

   (f) $(Q^{(0)})^{-1}\ v$ é autovetor de $A^{(1)}$.

   (g) $(Q^{(0)})^T\ v$ é autovetor de $A^{(1)}$.