SME0306 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova Sub (5 de dezembro de 2013) Valor de cada exercício: 2 pontos

---

1. Responda se verdadeiro ou falso:
   (a) A sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, onde
   $$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é impar} \\ \cos(10/n) & \text{se não} \end{cases}$$
   - é convergente. V
   - está ϵ-perto de 1, com $\epsilon = 0.5$. F
   - é limitada. V

   (b) Para $n \to +\infty$,
   - $\sin(3\,n^2) = \Theta(n^2)$. V
   - $n^3 + n^2 = O(\frac{1}{5}\,n^3)$. V
   - $n^3 = \Theta(10\,n^2)$. F

   Lembrete: $g = \Theta(f) \;\Leftrightarrow\; g = O(f)$ *e* $f = O(g)$.

   (c) Para $h \to 0$,
   - $\sin(h) - \tan(h) = \Theta(h^2)$. V
   - $\cos(h) - 1 + \frac{h^2}{2} = o(h^3)$. V
   - $\sin(h) - h = O(h^3)$. V

2. Seja f uma função suave e limitada. Seja a integral exata
   $$I = \int_x^{x+h} f(s)\; ds$$
   e seja a integral numérica
   $$\tilde{I} = h\,[\,\alpha\, f(x) + \beta\, f(x+h)\,]$$
   onde α e β são números reais. Responder se verdadeiro ou falso:
   (a) Se $\alpha + \beta = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h)$.V
   (b) Se $\alpha + \beta = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h^2)$.V
   (c) Se $\alpha = \beta = 1/2$ então $I - \tilde{I} = O(h^3)$.V

   Lembrete: Se $g(h) = O(h^p)$ *então* $g(h) = O(h^{p-1})$.

3. Procura-se uma interpolada polinomial cúbica *com apenas potências impares de* x que passe pelos pontos $(1, -1)$ e $(3, 93)$. Calcule o valor desta interpolada em $x = 2$.

Resposta: $p(2) \;=\; 46$	

4. Para a função
   $$F(V, I, R) = (V - RI)^2 + 10\,(R-2)^2 + 10\,(V-2)^2 + 10\,(I-4)^2$$
   faça uma iteração de otimização de gradiente a partir do ponto inicial $\underline{x}^{(0)} = (V, I, R)^T = (3, 3, 2)^T$.
   Responda: A direção de avanço será:

$\underline{d}^0 \;=$	

5. O método de Euler modificado para a EDO
   $$\frac{d}{dt}\underline{y} = \underline{f}(t, \underline{y}(t))$$
   se define como
   $$\underline{Z}^n = \underline{Y}^n + \frac{\Delta t}{2}\,\underline{f}(t_n, \underline{Y}^n)$$
   $$\underline{Y}^{n+1} = \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \underline{Z}^n)$$
   (a) Realizar um passo desse método numérico para a equação do oscilador
   $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\frac{dx}{dt} + x = 2\,t$$
   com condição inicial de posição e velocidade
   $$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2,$$
   respectivamente. Utilize passo de tempo $\Delta t = 0.2$.

   Responda: Qual a posição e a velocidade obtidas numericamente depois do primeiro passo de tempo?

Posição	
Velocidade	

   (b) **Responda:** Qual é o máximo passo de tempo que se pode utilizar sem perder a estabilidade?

$\Delta t_{\max} \;=$	

6. Seja o sistema incompatível
   $$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x - 2y &= -1 \\ x &= 1 \\ 4x - y &= 5 \end{aligned}$$
   Calcular a “melhor solução” no sentido dos mínimos quadrados com o produto escalar usual euclidiano.

$x^* =$	
$y^* =$	