SME0306 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 2 (20 de agosto de 2013)

Seja f uma função suave e limitada. Seja a integral exata

$$I = \int_x^{x+h} f(s)\, ds$$

e seja a integral numérica

$$\tilde{I} = h\,[\,\alpha\, f(x) + \beta\, f(x+h) + \gamma\, f(x+\frac{h}{2})\,] \qquad (1)$$

onde α, β e γ são números reais. Responder se verdadeiro ou falso:

1. Se $\alpha+\beta+\gamma = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h^2)$.V
2. Se $\alpha+\beta+\gamma = 3$, então $I - \tilde{I} = O(h^2)$.F
3. Se $\alpha+\beta+\gamma = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h)$.V
4. Se $\alpha+\beta+\gamma = 3$, então $I - \tilde{I} = O(h)$.V
5. Se $I - \tilde{I} = O(h^2)$ e $2\beta+\gamma = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h^3)$.V
6. Se $I - \tilde{I} = O(h^2)$ e $\beta+\gamma = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h^3)$.F
7. Se $I - \tilde{I} = O(h^2)$ e $2\beta+\gamma = 2$, então $I - \tilde{I} = O(h^2)$.V
8. Se $I - \tilde{I} = O(h^2)$ e $2\beta+\gamma = 0$, então $I - \tilde{I} = O(h^3)$.F
9. Se $I - \tilde{I} = O(h^3)$ e $12\beta+3\gamma = 1$, então $I - \tilde{I} = O(h^4)$.F
10. Se $I - \tilde{I} = O(h^3)$ e $12\beta+3\gamma = 4$, então $I - \tilde{I} = O(h^4)$.V
11. Se $I - \tilde{I} = O(h^3)$ e $12\beta+3\gamma = 4$, então $I - \tilde{I} = O(h^5)$.V

Faça como exerccio em casa a expansão de Taylor até ordem 6 para mostrar que, para funções f em geral, é impossível escolher α, β e γ tais que $I - \tilde{I} = o(h^5)$.

Exercícios adicionais (sugerido fazer até 10 de setembro):

1. A partir da integral numérica (1), que vale para qualquer intervalo $(x, x+h)$, escrever um pequeno programa Octave que, conhecendo a função f a integrar e o intervalo de integração (a, b), por exemplo

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

(cujo resultado exato é $J = \pi^2/4$, ver `mathworld.wolfram.com/DefiniteIntegral`) calcule uma aproximação numérica $\tilde{J}$. O programa deve permita escolher os parâmetros α, β e γ e o número N de sub-intervalos equi-espaçados desejados. Em cada subintervalo a integral numérica é feita usando (1) e tudo isso é somado.

Escolher por exemplo $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0$ (método dos trapézios). Fazer uma tabela do erro de integração $E = |J - \tilde{J}|$ como função de N para $N = 1, 2, 4, 8, \ldots$. Dá para ajustar uma lei $E \simeq a\, N^b$? Qual a relação entre (a) a ordem do método dos trapézios (segunda ordem, segundo todo mundo fala), (b) a ordem que esse método da no exercício da prova (terceira ordem), e (c) o exponente b?

Deveria dar o seguinte (mas faça e verifique): O rol de h no exercício da prova aqui é protagonizado por $(b-a)/N$, no caso $h = \pi/N$. Cuidado que, por haver um ponto adicional no meio de cada sub-intervalo, a distância entre pontos é $h/2$ e não h, mas o ponto central não é utilizado em absoluto ($\gamma = 0$). Cada uma das N subintegrais é feita com erro $O(h^3)$, como mostrado na prova. Porém, como $N = \pi/h$, quando somarmos os erros a ordem da integral toda será 2 e não 3 (essa é a relação entre (a) e (b)).

Já que esperamos $E = O(h^2)$, esperamos também $E = O(N^{-2})$ e por tanto $b = -2$.

Verifique outras escolhas de α, β e γ.

2. É interessante ver o que acontece quando a função não é suave, por exemplo

$$\int_0^4 f(x)\, dx \qquad \text{sendo} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \pi \\ 1 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$

Qual o exponente b que se obtem nesse caso? O valor exato é obviamente $4 - \pi$.

3. Treine seus desenvolvimentos de Taylor provando as seguintes afirmações. En todos os casos $f(x)$ é uma função suave.

(a) $f(x+\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+h)) + O(h^2)$.

(b) $f(x+\frac{h}{4}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+h)) + O(h)$.

(c) $f(x+\frac{h}{4}) = \frac{3}{4}f(x) + \frac{1}{4}f(x+h)) + O(h^2)$.

(d) Para qualquer θ (qualquer?),

$$f(x+\theta\, h) = (1-\theta)\, f(x) + \theta f(x+h)) + O(h^2)$$

(e) Se $x_j = j\, h$ e $\ell = Nh$, então

$$\int_0^{\ell} f(x)\, dx = h \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) + \frac{h^2}{2} \sum_{j=0}^{N-1} f'(x_j) + O(h^2)$$

Notar que o primeiro termo é o método dos retângulos, e o exercício mostra como corregir o resultado para obter $O(h^2)$ se se conhece a derivada nos pontos x_j.

(f) Considere a integral numérica

$$\tilde{I} = \alpha f(x) + \beta f(x+h) + \mu f'(x) + \eta f'(x+h)$$

que pretende aproximar $I = \int_x^{x+h} f(s)\, ds$. Como escolher α, β, μ e η para que $I - \tilde{I} = O(h)$? e $O(h^2)$? e $O(h^3)$?... da para obter $O(h^6)$?

(g) $f'(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + O(h)$.

(h) $f'(x+\frac{h}{2}) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + O(h^2)$.

(i) Para todo $\theta \neq \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = f'(x+\theta\, h) + O(h)$$

(j) $\frac{1}{2h}(f(x+h) - f(x-h)) = f'(x) + O(h^2)$

(k) Para todo $\theta \neq 1$,

$$\frac{1}{(1+\theta)\, h}(f(x+h) - f(x-\theta\, h)) = f'(x) + O(h)$$

(l) $\frac{1}{2h}(3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)) = f'(x) + O(h^2)$.