SME0306 - 2013
Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista de exercícios - Equações numéricas (26 de setembro de 2013)

O quê é a série de Taylor de uma função? Eu vejo ela como um polinômio que eu posso troncar a qualquer ordem e que, independentemente de se eu tronquei a ordem 1 ou a ordem 4, é a melhor aproximação "no ponto" dentre todas as aproximações da mesma ordem.
Isto é uma definição intuitiva, porque de fato a série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \dots$$

coincide exatamente com f se apenas consideramos "o ponto x_0". O que queremos dizer é que, suficientemente perto do ponto x_0, a série troncada até ordem k *é a melhor aproximação possível da f com polinômios de ordem k.*
De fato a soma de Taylor de ordem k pode ser vista como uma "reconstruida" ou uma "interpolada" da função f. No que segue vamos chamar ela de interpolada, embora o uso dessa palavra possa gerar pequenos malentendidos. De fato me parece que é uma ótima ideia chamá-la de "interpolada de Taylor".
Vamos supor a soma de Taylor de ordem 1 da função $\sin(2x)$ em $x_0 = \pi/3$. Ela não é outra coisa que o polinômio interpolador de primeiro grau

$$p(x) = \sin(2\pi/3) + 2\cos(2\pi/3)\,(x - \pi/3)$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = -x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -x + 1.913222$$

"que melhor aproxima, dentre todos os polinômios $ax + b$ a função $\sin(2x)$ perto de $\pi/3$".
Que quero significar com isto? Que para qualquer outro polinômio da forma $q(x) = ax + b$, se eu escolho uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 e só me importo com o que ali acontece, então vou ver claramente que $p(x)$ aproxima melhor a $f(x)$ do que $q(x)$.

Em geral você não se importa tanto com que seja a melhor aproximação ou não. O que você sim precisa muitas vezes e alguma aproximação básica, fácil de fazer cálculos, da função.
Observação: A interpolação é coisa quotidiana, sobre tudo a primeira ordem. Se nos falam que ainda existem apenas 800 exemplares de pituitas viteltii e que esse ano morreram 20, imediatamente pensamos que em 40 anos no vai ter mais nenhum. Observam como o que fizemos foi construir uma aproximada (ou interpolada) de primeira ordem

$$\#\ \text{pituitas} = 800 - 20 \times (\text{tempo} - \text{hoje})$$

e calculamos para que tempo a interpolada é zero.

Vamos então agora pensar que você esteja procurando o valor do parâmetro x_* para o qual $f(x) = \sin(2x)$ seja zero, partindo do ponto inicial $x_0 = \pi/3$. Na verdade nesse caso você resolveria direto, obtendo $x_* = \pi/2 = 1.570796$. Porém, se você conhecesse apenas o valor de $f(x_0) = 0.866025$ e de $f'(x_0) = -1$ em $x_0 = \pi/3 = 1.047197$ o ponto que você chutaria como x_* seria aquele que *zera a interpolada*, isto é,

$$x_* \cong 1.913222 \stackrel{\text{def}}{=} x_1$$

Note que você poderia nem mesmo saber que $f(x) = \sin(2x)$, o que é o caso mais frequente.
Paréntesis: Nesse novo ponto x_1 infelizmente $f(x)$ não vale nem zero nem nada próximo de zero, senão que vale $f(x_1) = -0.632557$. Mas, de qualquer jeito, o que outra coisa poderia ter sido feita? Com aquela informação e só aquela você fez o melhor que poderia ter feito.

Método da bisecção:
Calcule o ponto x_4 que seria obtido pelo método da bisecção procurando um zero da função

$$f(x) = \sin(4.2\,x + 1.3)$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.7$.

Método de Newton-Raphson:
Esse método é o que conseguimos quando zeramos a interpolada de primeira ordem que coincide em valor e derivada com a função. É o que fizemos com os pituitas, coitados, embora intuitivamente saibamos que o decaimento não vai ser linear até a extinção.
O método é, simplesmente e como já fizemos várias vezes, aplicar a operação desejada (nesse caso a operação é "valer zero") à interpolada da função em vez de à função.
Então, como a interpolada é

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)\,(x - x_i)$$

a receita que *define* o ponto x_{i+1} é $p(x_{i+1}) = 0$, ou equivalentemente

$$x_{i+1} = x_i - [f'(x_i)]^{-1}\, f(x_i) \tag{1}$$

Logicamente a receita não está definida quando $f'(x_i)$ é zero, já que se nos falassem que o número de pituitas é 800 e que a taxa com que está variando é zero, e nos perguntassem qual é a data estimada de extinção não teriamos resposta.
Calcule a sequência de Newton-Raphson até x_7 para o caso discutido acima de

$$f(x) = \sin(2x), \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

Faça uma tabela do tipo

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert$	$\lvert x_i - \pi/2\rvert$
0	$\pi/3$	0.866025	-1	0.866025	0.523598
1	1.913222	-0.632557	...		
...					

Método da secante: Nesse caso simplesmente utilizamos outra interpolada, em vez da "Interpolada de Taylor" de primeira ordem.
De fato, esse método não usa a derivada no ponto, e constroi uma interpolada linear simplezinha a partir dos dois últimos pontos (que também corresponde ao cálculo mais simplezinho de derivada numérica a partir do valor $f(x_i)$ e dos anteriores.
Então a interpolada é

$$p(x) = f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\,(x - x_i)$$

(verificar que passe pelos últimos dois pontos do plano $x - y$), e por tanto zerando ela obtemos a receita que *define* o ponto x_{i+1},

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^{-1} f(x_i) \tag{2}$$

Compare as equações (1) e (2) e entenda as analogias entre ambas.

Faça com o método da secante o mesmo que já fez com o Newton (construir a sequência, fazer a tabela, etc.). Notar que a coluna $f'(x_i)$ nesse caso não precisa ser pre-enchida.

Compare as duas tabelas obtidas e conclua sobre a velocidade de convergência do método. Faça uma tabela parecida para o método da bissecção e também compare. Consegue a partir dos dados das tabelas confirmar o afirmado no texto, de que as órdens de convergência desses três métodos são 1, 1.6 e 2?

Boa prática!! E não esqueçam a calculadora!!