SME0306 - 2013
Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista de exercícios - Interpolação (19 de setembro de 2013)

Lembre que temos insistido bastante no nosso "método" de obter aproximações de qualquer quantidade dependente de uma função genérica f a partir dos valores da função (ou também poderia ser de alguma derivada da função) em um número finito de pontos.
Nosso método não é muito sofisticado. De fato é, simplesmente,
Passo 1: Calcule a interpolada $p(x)$ da função $f(x)$.
Passo 2: Avalie a quantidade desejada para $p(x)$.
Exemplos de aplicação de nosso método natural de obter aproximações numéricas são:
Fórmulas de derivação numérica: Dados três pontos, x_1, x_2 e x_3, construa uma fórmula numérica que aproxime $f'(x_3)$ considerando conhecidos $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_3)$.
Como podem ver nas fotos dos quadros, nosso método (que pode sintetizar-se em *derivar a interpolada*) leva à seguinte formula:

$$f'(x_3) \simeq \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\, y_1 + \frac{x_3 - x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\, y_2 + \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\, y_3 \qquad (1)$$

que, no casso particular de pontos equiespaçados (espaçamento constante de passo h) leva à bem conhecida fórmula de derivação numérica

$$f'(x_3) \simeq \frac{3y_3 - 4y_2 + y_1}{2h} \qquad (2)$$

Essa fórmula, como podem verificar por desenvolvimento de Taylor, é a que tem melhor ordem (é $O(h^2)$) de todas as que podem ser construidas usando apenas os valores em x_1, x_2 e x_3. Este fato não é bem uma coincidência. Em geral pode-se provar que não há fórmulas de derivação numérica de maior ordem que a ordem obtida pelo nosso "método natural".
Exercício: Verificar bem todas as contas, não vá ser que eu tenha errado em algum sinal, né?
Fórmulas de integração numérica: Dados três pontos, x_1, x_2 e x_3, construa uma fórmula numérica que aproxime $\int_a^b f(x)\, dx$ considerando conhecidos $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_3)$. Esse é um problema típico de integração numérica e nosso método geral se sintetiza a *integre a interpolada*.
Exercício: Verifique que, no caso de espaçamento constante h e sendo $a = x_1$ e $b = x_3$, o resultado é

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx \simeq f(x_1)\,\frac{h}{3} + f(x_2)\,\frac{4h}{3} + f(x_3)\,\frac{h}{3} \qquad (3)$$

Calcule a ordem do erro dessa fórmula. Verifique que é a que cancela mais termos do desenvolvimento de Taylor.
Exercício: Construa uma fórmula de integração numérica para aproximar $\int_a^b f(x)\, dx$ considerando conhecidos os valores $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$, $z_a = f'(a)$, $z_b = f'(b)$.

Para calcular a interpolada também construimos um método natural:
Passo 1: Defina um espaço V de funções dentre as quais será procurada uma interpolada para a função $f(x)$. Pode ser um espaço P_k de polinômios, ou pode ser um espaço definido por partes, tipo o espaço Q_1 das splines lineares. Esse espaço e definido a partir de um conjunto de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_M$ como

$$Q_1 = \{\text{funções contínuas que, restritas a cada subintervalo } (x_i, x_{i+1}) \text{ são localmente um polinômio de grau} \leq 1\}$$

Exercício: Verifique que isto é um espaço vetorial.
Passo 2: Defina quais são os graus de liberdade (GDL) que serão considerados conhecidos da função f. Por exemplo: O primeiro GDL pode ser o valor de f no ponto x_1, o segundo o valor no ponto x_2, e quem sabe o terceiro poderia ser o valor da derivada segunda de f no ponto x_1. Porque não?
É importante que exista uma compatibilidade entre os GDL e o espaço V escolhido. Você tem de pensar: "Se eu conhecesse todos os GDL, quantas funções de meu espaço V os satisfariam?". Por exemplo, se meu V são os polinômios de segundo grau, e o que vou saber da f são apenas os valores em dois pontos (os GDL são $f(x_1)$ e $f(x_2)$), deve perguntar-se: "Quantos polinômios de segundo grau valem $f(x_1)$ em x_1 e $f(x_2)$ em x_2?". A resposta, como resulta lógico, deve ser <u>exatamente um</u> (nem menos nem mais) para que a interpolação esteja bem definida.

Exercício: Verifique que escolhendo os GDL do espaço Q_1 como sendo $f(x_1)$, ..., $f(x_M)$ se obtem uma combinação compatível. Construa a base dual a esses GDL. (Resposta: As "funções barraca", ou "tenda". Verifique.)
Passo 3: Escreva as equações correspondentes a cada GDL imposto em termos dos coeficientes livres e resolva o sistema de equações resultante.
Exemplo: Em cada subintervalo (x_i, x_{i+1}), a função interpolante $p(x)$ do espaço Q_1 acima tem a forma:

$$p(x) = \alpha_i x + \beta_i$$

Então cada subintervalo contribui ao sistema com duas equações,

$$\alpha_i x_i + \beta_i = f(x_i) \tag{4}$$

$$\alpha_i x_{i+1} + \beta_i = f(x_{i+1}) \tag{5}$$

e também com duas incógnitas.
Exercício: Provar que se a base dual $\varphi^{(1)}(x)$, ..., $\varphi^{(M)}(x)$ já foi calculada, e os valores a serem interpolados para cada grau de liberdade são z_1, z_2, ..., z_M (números reais), então a interpolada é

$$p(x) = z_1 \varphi^{(1)}(x) + z_2 \varphi^{(2)}(x) + \ldots + z_M \varphi^{(M)}(x) \tag{6}$$

O caso típico de uma base dual são os polinômios de Lagrange. Quais são os GDL dos quais esses polinômios são a base dual?

As **splines cúbicas naturais** aparecem de maneira direta no nosso método.
Nesse caso, os GDL impostos são os valores de f nos pontos x_1, x_2, ..., x_M, igualzinho ao caso das splines lineares. Porém, podendo escolher a interpolada Q_1 (linear por partes), quem sabe porque ela é bicuda e não suave nos estremos dos subintervalos, preferimos escolher o espaço

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \text{funções } g \text{ de classe } C^2 \text{ que, restritas a cada subintervalo } (x_i, x_{i+1}) \text{ são localmente um polinômio de grau} \leq 3 \\ \text{e ainda satisfazem } g''(x_1) = g''(x_M) = 0 \end{array} \right\}$$

Por incrível que pareça, esse espaço é compatível com os graus de liberdade $f(x_1)$, ..., $f(x_M)$ escolhidos. A maneira de calcular a spline cúbica natural interpolante dos pontos dados é explicada nas notas do MIT e em muitos livros. Leia dali e resolva os exercícios a seguir.
Exercício: Construa a spline natural S que satisfaz

$$S(x_1 = 0) = 1; \qquad S(x_2 = 3) = -1; \qquad S(x_3 = 4) = 1$$

e desenhe ela entre $x = 0$ e $x = 4$. Compare com a interpolada construida com uma parábola. Para resolver matrizes pode usar Octave em vez de fazer na mão, e para desenhar pode usar Octave ou Gnuplot.
Exercício: Construa a base dual dos GDL do exercício anterior. Desenhe.

Boa prática!