SME0306 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista de exercícios (14 de novembro de 2013)

---

1. Um método previsor-corretor (analisando o método pode descobrir o porquê do nome) é

$$\begin{aligned} \text{Previsor:} \quad \underline{Z}^{n+1} &= \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_{n+1}, \underline{Y}^n) \\ \text{Corretor:} \quad \underline{Y}^{n+1} &= \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_{n+1}, \underline{Z}^{n+1}) \end{aligned}$$

   Calcular o limite de estabilidade linear do método (considerando a equação $y' = -\lambda\, y$). Comparar com a do método de Euler implícito, do qual o método acima é a versão previsor-corretor.

   A partir do resultado anterior, calcular qual o passo de tempo máximo utilizável para resolver a EDO

$$5\, x'' + 5, x' + 20\, x = \sin(t)$$

2. Se recomenda fortemente programar o exercício anterior em Octave e verificar o comportamento do método quando o passo de tempo é inferior ou superior ao limite calculado. Também é interessante analisar a solução, que corresponde a um oscilador amortecido com excitação periódica.

3. Repetir os dois primeiros exercícios para a variação do método correspondente a duas aplicações do corretor:

$$\begin{aligned} \text{Previsor:} \quad \underline{Z}^{n+1} &= \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_{n+1}, \underline{Y}^n) \\ \text{Corretor:} \quad \underline{W}^{n+1} &= \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_{n+1}, \underline{Z}^{n+1}) \\ \text{Corretor:} \quad \underline{Y}^{n+1} &= \underline{Y}^n + \Delta t\, \underline{f}(t_{n+1}, \underline{W}^{n+1}) \end{aligned}$$

   Comparar os resultados.

4. Repetir os dois primeiros exercícios para o método de Runge-Kutta de 4 estágios.

5. Sejam dois corpos pontuais, cujas posições vamos denotar por $x_1(t)$ e $x_2(t)$, unidos por uma mola de constante k. Sendo as massas respectivas m_1 e m_2, as equações que governan o movimento são

$$\begin{aligned} m_1\, x_1''(t) &= k\,(x_2(t) - x_1(t)) \\ m_2\, x_2''(t) &= k\,(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned}$$

   (a) Verifique se os sinais estão certos. Estão? Pense se voce poderia ter deduzido essas equações sozinho/a.

   (b) Escreva o método dos trapézios para esse sistema. Faça uma iteração com todas as constantes (m_1, m_2, k) iguais a 1 (hum), a partir da condição inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_1'(0) = -1$, $x_2'(0) = 0$.

   (c) O método dos trapézios requer resolver um sistema linear, não é? Qual é esse sistema linear? Dá para saber se a matriz será sempre inversível?

   (d) Verifique se a $\underline{f}$ é

$$\underline{f}(\underline{y}) = \left(y_3\ ,\ y_4\ ,\ \frac{k}{m_1}\,(y_2 - y_1)\ ,\ \frac{k}{m_2}\,(y_1 - y_2) \right)$$

   (e) Verifique se o método dos trapézios resulta em

$$\begin{aligned} Y_1^{n+1} &= Y_1^n + \frac{\Delta t}{2}\left(Y_3^n + Y_3^{n+1}\right) \\ Y_2^{n+1} &= Y_2^n + \frac{\Delta t}{2}\left(Y_4^n + Y_4^{n+1}\right) \\ Y_3^{n+1} &= Y_3^n + \frac{k\,\Delta t}{2\,m_1}\left(Y_2^n - Y_1^n + Y_2^{n+1} - Y_1^{n+1}\right) \\ Y_4^{n+1} &= Y_4^n + \frac{k\,\Delta t}{2\,m_2}\left(Y_1^n - Y_2^n + Y_1^{n+1} - Y_2^{n+1}\right) \end{aligned}$$

   descobriu o erro?

   (f) Qual o passo de tempo máximo imposto pela estabilidade linear para esse método? Considere todas as constantes unitárias.

   (g) E para o método de Euler modificado (RK2)? Se não der para resolver na mão, faça com Octave. Considere todas as constantes unitárias.

   (h) As equações diferenciais foram escritas para o caso de uma mola de conexão de comprimento relaxado nulo. Se o comprimento relaxado fosse ℓ, quais seriam as equações?

   (i) Somando as duas EDOs do sistema, obtém-se

$$m_1\, x_1'' + m_2\, x_2'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_1\, x_1' + m_2\, x_2' = \text{ constante}$$

   expressando a conservação da quantidade de movimento no tempo. O método dos trapézios reproduz essa caraterística do problema exato? Isto é, acontece que

$$m_1\, Y_3^{n+1} + m_2\, Y_4^{n+1} = m_1\, Y_3^n + m_2\, Y_4^n$$

   para todo n? E para o método de Euler explícito?

   (j) E a energia (cinética mais a da mola, que vale $\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$), ela é conservada pelo método numérico (trapézios e Euler explícito)?

Boa prática!! E não esqueçam a calculadora!!