SME0306 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista de exercícios - Interpolação (12 de setembro de 2013)

Em termos gerais, o problema de interpolação pode ser descrito da seguinte maneira:

- Seja V um espaço vetorial de funções de $\mathbf{x}$ (o caso mais frequente é quando a variável $\mathbf{x}$ é de dimensão 1 (um), que representamos como x, mas é apenas um caso particular). Seja N a dimensão de V.

  Exercício: Provar que o conjunto de polinômios P_K de grau $\leq k$ é um espaço vetorial de dimensão $K+1$. Para isto conferir ponto por ponto a definição de espaço vetorial, com cuidado (por exemplo, o que é a *soma* de dois polinômios?).

- Sejam x_1, x_2, ..., x_M (que poderiam ser, cada um deles, vetores, mas vamos nos restringir ao caso unidimensional) pontos *distintos* de $\mathbb{R}$. Dados M números reais ordenados y_1, y_2, ..., y_M, dizemos que uma função p pertencente a V *interpola* aqueles valores se, e só se,

$$p(x_i) = y_i \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, M\} \tag{1}$$

- Todo espaço vetorial tem uma base, lembram? E, tendo uma, de fato tem infinitas diferentes, claro.

  Exercício: Mostre três bases diferentes do espaço P_3 e do espaço P_5.

- Qualquer que seja a base de V, ela vai estar formada por N funções de x (verdade?). Chamemos de $\phi^{(1)}(x)$, ..., $\phi^{(N)}(x)$ às funções da base. Então a interpolada que chamamos de p e satisfaz (1) pode ser escrita, de maneira única (porque única?) como

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi^{(j)}(x) \tag{2}$$

  e por tanto a equação (1) se re-escreve como

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi^{(j)}(x_i) = y_i \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, M\} \tag{3}$$

  Esse é um sistema *linear* nas N incógnitas $\{\alpha_j\}$. Claramente para ter solução única deve ser $M = N$ (sabe porquê?).

  Exercício: Escreva o sistema (3) explícitamente para cada uma das bases do espaço P_3 do exercício anterior. Verifique como se calcula cada coeficiente do sistema e como ele acaba sendo equivalente a um sistema linear com matriz quadrada. Veja quanto valem os coeficientes de cada linha e coluna da matriz. Considere que os pontos são $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 10$. Para os valores de y_1 a y_4, deixe os valores como variáveis.

- Sempre que $M = N$ existe alguma chance de que a interpolante exista e seja única para cada valor dos $\{y_i\}$. Se $M < N$ está claro que, ou não haverá nenhuma, ou haverá infinitas. Pense se isto está realmente claro para você.

  Exercício: Mostre um caso, mesmo que simples, em que $M < N$ e haja infinitas soluções, e outro onde não haja nenhuma.

- Se $M > N$ (mais pontos que a dimensão do espaço), esperamos que em geral não haja solução, mas poderia havé-la e até haver infinitas.

  Exercício: Pode pensar um caso de cada?

- No caso em que V seja o espaço P_K e por tanto $N = K+1$ (você entende porque $N = K + 1$?), explique para qual escolha de base a matriz do sistema

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{\alpha} = \underline{y} \tag{4}$$

  é a matriz de van der Monde

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^K \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^K \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_M & x_M^2 & \ldots & x_M^K \end{pmatrix} \tag{5}$$

- De fato, a equação (3) leva sempre a um sistema da forma (4), onde a incógnita é o vetor (coluna) $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)^T$. O lado direito é o vetor coluna dos valores $\{y_i\}$. A matriz, no entanto, depende da base escolhida, já que seu componente da linha i e coluna j vale

$$A_{ij} = \phi^{(j)}(x_i) \tag{6}$$

- Notar que os coeficientes α_j *não são* os coeficientes do polinômio $p(x)$. O polinômio que interpola os pares (x_i, y_i) dados é sempre o mesmo, independente da base escolhida, os coeficientes α_j não.

- Ver que, se se escolhe a base

$$\phi^{(1)}(x) = 1, \quad \phi^{(2)}(x) = x, \quad \phi^{(3)}(x) = x^2, \qquad \text{etc.} \tag{7}$$

  então, e só então, será

$$p(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \ldots \tag{8}$$

- Notar que, escolhendo a base (7), o cálculo do valor do polinômio interpolador em um ponto qualquer x uma vez conhecidos os α_j é bem fácil. Toda a dificuldade é transferida para a resolução da matriz, que envolve bastante conta e é bastante sensível ao erro de arredondamento.

- Já que inverter a matriz é o passo custoso, e já que a matriz depende da base escolhida, poderiamos escolher uma base que faça a matriz fácil de inverter. O ideal seria diagonal, não é?

  Exercício: Verifique que escolhendo como base os polinômios de Lagrange, isto é, escolhendo

$$\phi^{(j)}(x) = \frac{\Pi_{k \neq j}(x - x_k)}{\Pi_{k \neq j}(x_j - x_k)} \tag{9}$$

  a matriz $\underline{\underline{A}}$ resulta diagonal e, de fato, igual à matriz identidade.

(voltar a página!)

- Escolhendo como base os polinômios de Lagrange, por tanto, os coeficientes α_j resultam iguais aos valores y_j que desejamos interpolar, e o polinômio interpolador pode ser calculado, para qualquer ponto x, com a fórmula

  $$p(x) = y_1\phi^{(1)}(x) + y_2\phi^{(2)}(x) + y_3\phi^{(3)}(x) + \dots \qquad (10)$$

  Porém deve-se notar que o cálculo de $\phi^{(3)}(x)$ agora involve toda uma produtória de números (ver a definição, equação (9)), o que é bem mais complicado do que simplesmente elevar x ao quadrado, como era no caso de escolher a base definida pela equação (7).

  Exercício: Escolha quatro pares (x, y) de seu agrado e calcule na mão o polinômio interpolador $p(x)$ em duas ou três bases diferentes, conferindo que entende o procedimento e que sempre se obtem exatamente o mesmo polinômio. No caso em que precisar resolver uma matriz, fique a vontade de resolver com o Octave e não na mão.

- **Exercício:** Faça um pequeno programa em Octave que avalie em 100 pontos equiespaçados do intervalo $[0, 3]$ o polinômio interpolador de três pares arbitrários (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), calculando o polinômio interpolador na base $\{1, x, x^2\}$ e na base dos polinômios de Lagrange desses três pontos.

- **Exercício:** Escolhendo agora a base que você quiser, que já neste ponto deve ter ficado claro que o polinômio interpolador não depende dela, suponha que lhe são dados seis números: $x_1, y_1, d_1, x_2, y_2, d_2$ (que poderiam ser, por exemplo, 1, 2, 3, 4, 5 e 6). Construa o polinômio interpolador $p(x)$ tal que en $x = x_1$ tem valor y_1 e derivada d_1 e no ponto $x = x_2$ tem valor y_2 e derivada d_2.

Boa prática!