SME0306 - 2013

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista de exercícios - EDOs (10 de outubro de 2013)

Nosso objetivo é levar alguns sistemas da física à forma canônica com a qual analisaremos e resolveremos numericamente as EDOs, que é:
Problema de valor inicial (PVI): Seja conhecida uma função $\underline{f} : [t_0, t_M] \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, onde t_0 e t_M indicam os "instantes" iniciais e final de simulação e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ é o domínio de definição de $\underline{f}$. Seja ainda $\underline{y}_0$ uma "condição inicial" conhecida (pertencente a $\mathcal{D}$).
O PVI consiste em *determinar uma função* $\underline{y} : [t_0, t_M] \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\frac{d\underline{y}}{dt}(t) = \underline{f}\left(t, \underline{y}(t)\right) \qquad \forall t \in (t_0, t_M) \tag{1}$$

$$\underline{y}(t_0) \tag{2}$$

---

1. Seja o sistema de um pêndulo de massa m, com gravidade g e comprimento ℓ. O ângulo $\theta(t)$ que forma o braço do pêndulo com a vertical satisfaz a equação de Newton

$$m\,\ell\,\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -m\,g\,\sin(\theta(t)) \tag{3}$$

Definindo

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$$

determinar a função $\underline{f}(t, \underline{z})$ que permite levar a equação (3) à forma (1).

---

2. Seja uma partícula carregada (com carga q) de massa m se movimentando em um campo elétrico eletrostático bidimensional $\vec{E}$, que é o gradiente do potencial elétrico, também bidimensional e dependente do tempo,

$$V(t, \vec{x}) = \frac{1 + t^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Sabendo, como falamos antes, que

$$E_1(t, \vec{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \qquad E_2(t, \vec{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

e denotando a trajetória da carga como $\vec{X}(t)$, a segunda lei de Newton estabelece que

$$m\,\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}(t) = q\,\vec{E}(t, \vec{X}(t)) \tag{4}$$

Definindo

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix}$$

determinar a função $\underline{f}(t, \underline{z})$ que permite levar a equação (4) à forma (1).

---

3. Uma peça metálica é colocada em um forno a temperatura inicial T_i. Sabendo que a peça troca calor com o forno por radiação e por convecção, com as leis

$$q_{\text{rad}} = C_1(T_{\text{parede}}^4 - T^4) \tag{5}$$

$$q_{\text{conv}} = C_2(T_{\text{ar}} - T) \tag{6}$$

onde T é a temperatura (média) da peça e se conhecem também as constantes, a temperatura do ar e a da parede do forno.

   (a) Definindo $y(t) = T(t)$ determine a função $f(t, y)$ como nos exercícios anteriores.

   (b) Veja que um *estado estacionário* do sistema, no qual a temperatura não varia mais, corresponde a um valor de $y = y_{ss}$ tal que

$$f(t, y_{ss}) = 0 \qquad \forall\, t \tag{7}$$

   Assumindo $T_{\text{ar}} = 600$, $T_{\text{parede}} = 800$, $C_1 = 10^{-9}$, $C_2 = 1$, calcule T_{ss}.

---

4. O campo de velocidade de um fluido onde está passando uma onda tem a expressão

$$u_x(t, x, z) = a\,\cosh(z + 1)\,\cos(x - t) \tag{8}$$

$$u_z(t, x, z) = a\,\sinh(z + 1)\,\sin(x - t) \tag{9}$$

e sabendo que a trajetória $(x(t), z(t))$ de uma partícula de fluido satisfaz

$$x'(t) = u_x; \qquad z'(t) = u_z$$

escreva o PVI que determina a trajetória na forma dada pela equação (1).

---

5. Leve as equações de Lotka-Volterra

$$\frac{du}{dt} = -2u + uv, \qquad \frac{dv}{dt} = v - uv$$

à forma (1). Note que a função $\underline{f}$ não depende do tempo (sistema autônomo). Determine os estádos estacionários do sistema.
