# SME0305 - 2016

**Gustavo C. Buscaglia / Roberto F. Ausas**

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com
ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

---

## Oscilações de membranas

### Membranas elásticas

- Uma estrutura frequente e relativamente simples de analizar é uma **membrana**, isto é, um corpo quase-bidimensional que ocupa uma região $\Omega$ do plano $x - y$ e está submetido a uma tensão $\sigma$.
- Uma "membrana unidimensional" é uma corda tensa.
- A dinâmica da membrana surge de resolver

$$\rho\, e\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sigma\, \nabla^2 w = f(x, y, t)\ , \tag{1}$$

  onde $\rho$ é a densidade, $e$ a espessura, $w(x, y, t)$ o deslocamento **vertical** da membrana no ponto $(x, y)$ ao tempo $t$, $\sigma$ a tensão membranal (em N/m), $\nabla^2$ o operador Laplaciano e $f(x, y, t)$ a força vertical aplicada (em N/m$^2$).

- Dividindo a membrana com o mesmo procedimento utilizado para a equação do calor, chegamos nas equações discretizadas

$$\rho_{ij}\, e_{ij}\, \frac{d^2 w_{ij}}{dt^2} - \sigma\, \frac{w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{ij}}{\delta^2} = f_{ij}(t) \tag{2}$$

- Agora transformamos nossa "matriz de incógnitas" $w_{ij}$ em um vetor de incógnitas:

$$W_k = w_{ij} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = i + (j-1) * N_1 \tag{3}$$

onde $N_1$ é o número de nós em $x$.

```
function k = ij2n (i, j, N1)
 k = i + (j-1)*N1;
end
```

- Fazemos o mesmo com a força, $F_k = f_{ij}$.

- Chamando ainda $M$ a matriz diagonal que tem $\rho_{ij} e_{ij}$ na posição $k = i + (j-1)N_1$ (matriz de massa), e $K$ a matriz de rigidez (discretização do $-\nabla^2 w$), as equações resultam

$$M\, \frac{d^2 W}{dt^2} + K\, W = F(t) \tag{4}$$

onde $M$ e $K$ são matrizes de $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$, e $W$ e $F$ são vetores (coluna) de $N_1 N_2$ componentes.

- A construção da matriz $K$ pode ser feita assim:

```
function [K M] = matmembrana(N1,N2,sigma,delta)
 nunk = N1*N2;
 K = zeros(nunk,nunk); M = K;
 for i=2:N1-1
  for j=2:N2-1
   Ic = ij2n(i,   j,   N1);  K(Ic,Ic) =  4;
   Ie = ij2n(i+1, j,   N1);  K(Ic,Ie) = -1;
   Iw = ij2n(i-1, j,   N1);  K(Ic,Iw) = -1;
   In = ij2n(i,   j+1, N1);  K(Ic,In) = -1;
   Is = ij2n(i,   j-1, N1);  K(Ic,Is) = -1;
  end
 end
 K = K*sigma/(delta^2);
 .....(continua)
```

- Agora colocamos condições de borda e calculamos a matriz $M$:

```
 .....
 for i=1:N1
  for j=1:N2
   xi=(i-1)*delta;
   yj=(j-1)*delta;
   Ic=ij2n(i,j,N1);
   if ((i==1 || i==N1) || (j==1 || j==N2))
         K(Ic,:)=0; K(:,Ic)=0; K(Ic,Ic)=1e9;
   end
   rhoij=1.; #programar, e.g., rhoij=1+xi*jy
   eij=1.;   #programar
   M(Ic,Ic)=rhoij*eij;
  end
 end
 K = sparse(K); M = sparse(M);
end
```

## Oscilações livres

- Uma vez que temos as matrizes da estrutura, as **frequências** ($\omega_i$) e **modos** ($\Phi^{(i)}$) de oscilação livre da estrutura surgem, como antes, de resolver o problema de autovalores
$$K\,\Phi^{(i)} = \omega_i^2\, M\,\Phi^{(i)}\ . \tag{5}$$

  Isto se faz, em Octave, executando

```
[K M] = matmembrana(N1,N2,sigma,delta);
[V D] = eig(K,M);
```

  Com isto cada coluna de `V` é um autovetor (que aproxima a correspondente autofunção). Podemos visualizar fazendo

```
zz=reshape(V(:,1),N1,N2);
surf(zz)
contourf(zz)
```

  ou melhor

```
for i=1:100, surf(zz*sin(0.1*i));...
 axis([0 N2 0 N1 -.08 .08]); pause; end
```

- Os autovalores são

```
lam = diag(D)
```

e as frequências próprias da estrutura

```
omega=sqrt(lam)
```

**Exercício 1:** Calcular (usando Octave) as primeiras 10 frequências e modos de oscilação de uma membrana com forma de triângulo retângulo cujos catetos medem $5$ e $7$ metros, sendo $rho$ e uniforme de valor 1 kg/m$^2$ e a tensão $\sigma = 100$ N/m. A borda da membrana está fixada ($w = 0$).

**Exercício 2:** Se sabe que a membrana anterior oscilará apenas nos três primeiros modos (os outros não serão excitados significativamente). Explique como escolheria um ponto $(x^*, y^*)$ da membrana tal que $w(x^*, y^*, t)$ meça unicamente as deflexões provindas do primeiro modo de oscilação.

## Oscilações forçadas

- Vamos colocar um amortecimento na equação diferencial proporcional à matriz de massa:

$$M \frac{d^2 W}{dt^2} + \beta M \frac{dW}{dt} + K W = F(t) \tag{6}$$

- Assumamos agora que $F(t)$ é cosenoidal,

$$F(t) = Z \cos(\omega_* t) \ , \tag{7}$$

e analizemos a resposta da membrana postulando uma solução da forma

$$W(t) = \sum_i c_i \, cos(\omega_* t + \phi_i) \, \Phi^{(i)} \ . \tag{8}$$

Isto leva a

$$W'(t) = -\sum_i c_i \, \omega_* \, \sin(\omega_* t + \phi_i) \, \Phi^{(i)} \ , \qquad W''(t) = -\sum_i c_i \omega_*^2 \cos(\omega_* t + \phi_i) \, \Phi^{(i)}$$

Assim resulta

$$K W = \sum_i c_i \cos(\omega_* t + \phi_i) \, K \, \Phi^{(i)} = \sum_i c_i \, \omega_i^2 \cos(\omega_* t + \phi_i) \, M \, \Phi^{(i)} \tag{9}$$

- Substituindo,

$$\sum_i c_i \left[ (-\omega_*^2 + \omega_i^2) \cos(\omega_* t + \phi_i) - \beta\, \omega_* \sin(\omega_* t + \phi_i) \right] M\, \Phi^{(i)} = Z \cos(\omega_* t) \tag{10}$$

- No lado direito, decompomos $Z$ na base $M\,\Phi^{(i)}$ ,

$$Z = \sum_i \alpha_i\, M\, \Phi^{(i)}$$

e utilizamos

$$\cos(\omega_* t) = \cos\phi_i \cos(\omega_* t + \phi_i) + \sin\phi_i \sin(\omega_* t + \phi_i)$$

para obter, igualando coeficientes,

$$c_i = \frac{\alpha_i \cos\phi_i}{-\omega_*^2 + \omega_i^2} = \frac{-\alpha_i \sin\phi_i}{\beta\, \omega_*} \; . \tag{11}$$

Eliminando $\phi_i$, resulta

$$c_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{(-\omega_*^2 + \omega_i^2)^2 + \beta^2 \omega_0^2}} \tag{12}$$

**Exercício 3:** Sabendo que os autovetores $\Phi^{(i)}$ cumprem $(\Phi^{(j)})^T M \Phi^{(i)} = \delta_{ij}$, escrever os comandos de octave que permetem calcular os coeficientes $\alpha_i$ a partir do vetor $Z$. Programar em Octave.

**Exercício 4:** Refazer os cálculos dos coeficientes $c_i$ quando o termo de amortecimento é proporcional à matriz $K$, i.e., é da forma

$$+\gamma K \frac{dW}{dt}$$

- Dos cálculos anteriores surge que a oscilação forçada da membrana é dada por

$$W(t) = \sum_i \frac{\alpha_i}{\sqrt{(-\omega_*^2 + \omega_i^2)^2 + \beta^2 \omega_0^2}}\, cos(\omega_* t + \phi_i)\, \Phi^{(i)} \ . \tag{13}$$

- A energia elástica da membrana é

$$E_e = \frac{1}{2} W^T\, K\, W = \frac{1}{2} \sum_i c_i^2\, \omega_i^2\, \cos^2(\omega_* t + \phi_i) \tag{14}$$

o que permite a energia elástica média do modo como

$$A_e = \frac{1}{4} \sum_i c_i^2\, \omega_i^2 \ . \tag{15}$$

- Isto foi implementado na função `emedia`, que assume que todos os $\alpha_i$ são 1 e calcula a energia media para 1001 valores de $\omega_*$ equidistribuidos entre os valores `om1` e `om2`.

```
function [x y] = emedia(om1,om2,lam,beta)
 x=linspace(om1,om2,1001);
 dd=(om2-om1)/1000;
 for j=1:1001
  ome=om1+(j-1)*dd;
  y(j)=0.25*norm(sqrt(lam)./(-ome^2+beta*i*ome+lam))^2;
  if (y(j)>100)
   y(j)=100;
  end
 end
end
```

- Agora fazemos

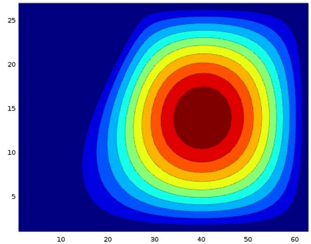
```
> [K M]=matmembrana(27,63,1,0.1);
> [V D]=eig(K,M);
lam=diag(D); ome=sqrt(lam)
ome =
   1.3929e+00
```

```
1.8215e+00
2.3058e+00
2.5269e+00
2.7440e+00
2.8804e+00
....
```

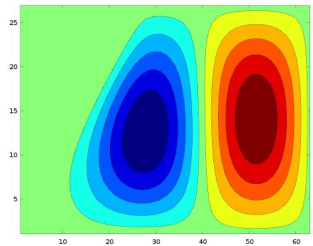
Essas são as primeiras 6 frequências próprias da estrutura, em rad/seg. Note que é uma membrana bem mole, com frequência fundamental de 8.75 segundos. Isto é devido a que a tensão nela é bem baixa, apenas 1 N/m.

- Os primeiros modos normais são

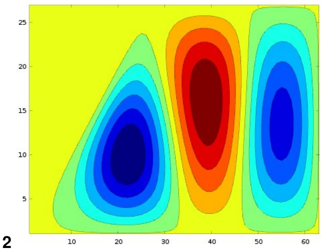
```
zz=reshape(V(:,1),27,63);contourf(zz)
```



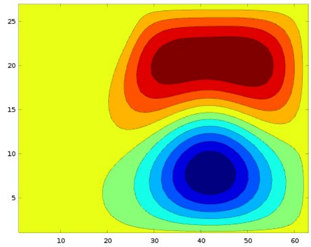

1



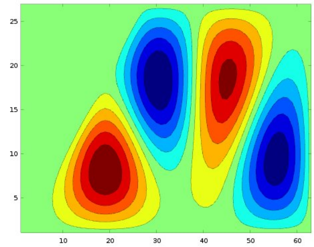

2



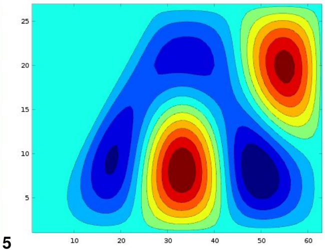

3



4



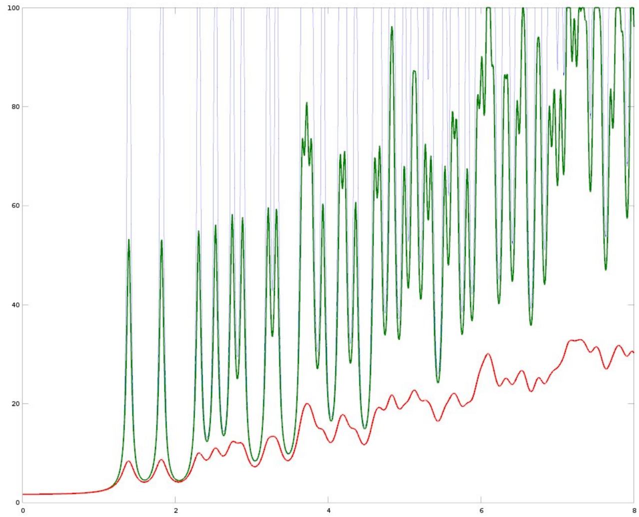
5



6

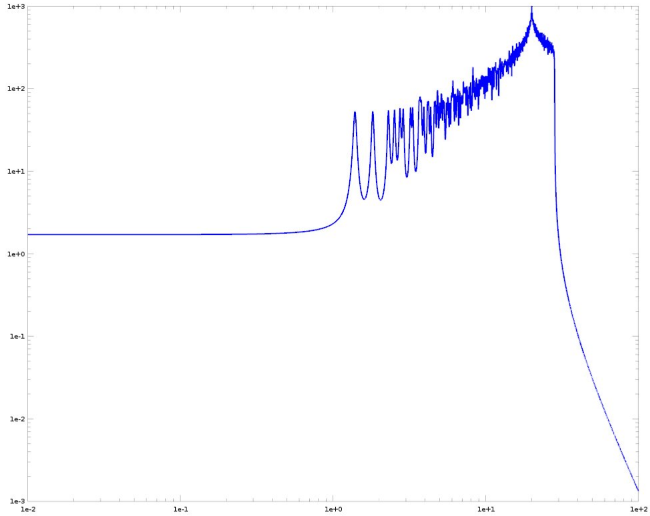
- A energia média de oscilação da membrana quando submetida a uma força de frequência $\omega_*$ entre 0 e 8 rad/sec, com $\beta = 3 \times 10^{-2}$, $7 \times 10^{-2}$ e $2 \times 10^{-1}$ é mostrada na figura. Note a complexidade do espectro de resposta pela influência das resonâncias próximas a cada frequência.

```
>[x y1]=emedia(0,8,lam,3e-2);
>[x y2]=emedia(0,8,lam,7e-2);
>[x y3]=emedia(0,8,lam,2e-1);
>plot(x,y1,x,y2,'linewidth',2,x,y3,'linewidth',2)
```

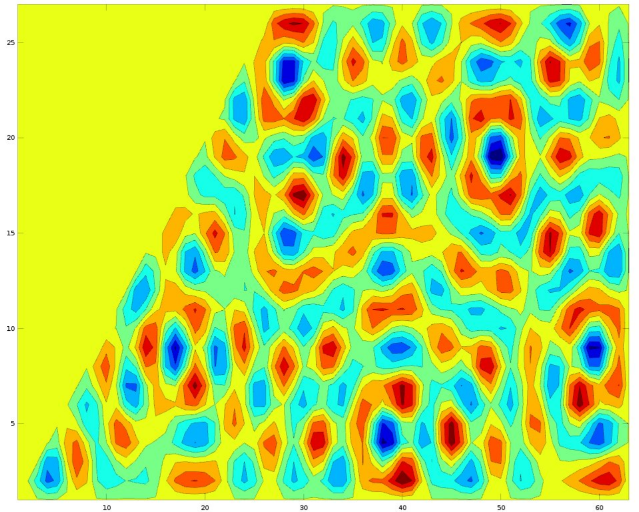



O espectro completo é melhor visualizado em loglog:

```
>[x y]=emedia(0.01,100,lam,7e-2);
>loglog(x,y,'linewidth',2)
```



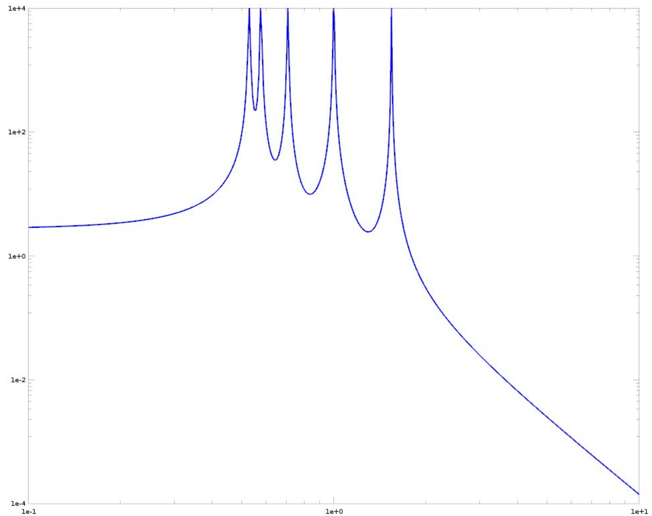

As frequências e modos melhor calculados são os primeiros, aqueles cujo comprimento de onda (são ondas estacionárias) é muito maior que $\delta$ (o tamanho de malha). O modo 200, por exemplo, cuja frequência é 13.66 rad/sec, sem dúvida será pouco parecido ao da membrana contínua.


25
20
15
10
5
10
20
30
40
50
60

- Note que a rotina anterior vale para **qualquer** estrutura, que tenha uma estrutura de frequências próprias dadas por `lam` e cujo amortecimento seja da forma $\beta\, M\, W'$. Pode ser também utilizada nas estruturas de molas e massas da semana passada.

```
>caixac3
> [V D]=eig(Kmat,Mmat)
V =
 -0.27219 0.00000 0.00000 0.00000  0.40825 -0.87135
  0.00000 0.00000 0.00000 1.00000  0.00000  0.00000
 -0.46837 0.00000 0.00000 0.00000  0.40825  0.33758
  0.00000 0.00000 0.70711 0.00000 -0.00000  0.00000
 -0.40298 0.00000 0.00000 0.00000 -0.40825 -0.06539
  0.00000 0.57735 0.00000 0.00000  0.00000 -0.00000
D =
Diagonal Matrix
 0.27924       0       0       0       0       0
       0 0.33333       0       0       0       0
       0       0 0.50000       0       0       0
       0       0       0 1.00000       0       0
       0       0       0       0 1.00000       0
       0       0       0       0       0 2.38743
>lam=diag(D);ome=sqrt(lam);
```

```
>[x y]=emedia(0.1,10,lam,1e-3);
>loglog(x,y,'linewidth',2)
```



**Exercício 5:** Calcule usando Octave a amplitude de oscilação horizontal da massa A quando se aplica na massa B uma força horizontal de valor $\cos(2\,t)$ Newtons. Os resultados são mais divertidos quando as molas são todas diferentes, não programe apenas para o caso de todas iguais (a matriz $\mathbb{V}$ em geral será cheia).