

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com

ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

Oscilações de estruturas elásticas

Estrutura unidimensional

- A configuração da figura,



consiste de um conjunto de molas em série, de valores k_1, \dots, k_n . Asumimos que em cada união se concentra uma massa m_i .

- Nosso objetivo é calcular os **modos de oscilação** dessa estrutura.
- Os deslocamentos dos extremos são fixados a zero:

$$u_0 = 0, \quad u_n = 0 . \quad (1)$$

- A energia elástica pode se escrever, em termos dos deslocamentos $u(1, \dots, n-1)$ como

$$E(u) = \frac{1}{2} u^T K u = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{2} (u_i - u_{i-1})^2 . \quad (2)$$

- Quando aplicamos forças f_i às massas, chegamos ao sistema:

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + K u = f . \quad (3)$$

- O mesmo sistema de equações pode ser escrito como

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + (T_i - T_{i+1}) = f_i \quad (i = 1, \dots, n-1) , \quad (4)$$

ou, substituindo $T_i = k_i(u_i - u_{i-1})$,

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} - k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) u_i - k_{i+1} u_{i+1} = f_i \quad (i = 1, \dots, n-1) . \quad (5)$$

molas1d.m

```
n=4;  
k=ones(n,1);  
m=ones(n-1,1);  
##k(2)=3; m(3)=2;
```

```
## Matriz de rigidez  
Kmat=zeros(n-1,n-1);  
Kmat(1,1)=k(1);  
Kmat(n-1,n-1)=k(n);  
for i=1:n-2  
Kmat(i,i)=Kmat(i,i)+k(i+1);  
Kmat(i+1,i+1)=Kmat(i+1,i+1)+k(i+1);  
Kmat(i,i+1)=Kmat(i,i+1)-k(i+1);  
Kmat(i+1,i)=Kmat(i+1,i)-k(i+1);  
end  
## Matriz de massas  
Mmat=zeros(n-1,n-1);  
for i=1:n-1  
Mmat(i,i)=m(i);  
end
```

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots - k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots)$$

Oscilações livres

- Corresponde ao caso $f = 0$ (sem forças aplicadas).

- **Teorema:** A evolução do sistema

$$M u'' + K u = 0$$

a partir de uma condição inicial arbitrária $u(0) = U$, $u'(0) = V$ (deslocamentos e velocidades), é:

$$u(t) = \sum_{k=1}^d p^{(k)} c_k \sin(\omega_k t + \phi_k)$$

onde os vetores $p^{(k)}$ e as frequências ω_k são solução do problema de autovalores

$$K p^{(k)} = \omega_k^2 M p^{(k)}$$

e os coeficientes c_k e ϕ_k , de amplitude e fase, são definidos pela condição inicial.

- Para provar basta substituir, obtendo-se

$$\sum_k c_k (-\omega_k^2 M + K) p^{(k)} = 0. \quad \square$$

- Os vetores $p^{(k)}$ são os **modos naturais** da estrutura, e os ω_k são as **frequências naturais** dela.
- Caso $n = 4$ (três massas)

```
> molas1d
```

```
> [s d]=eig(Kmat,Mmat)
```

```
s =
```

```
-5.0000e-01  -7.0711e-01  5.0000e-01  
-7.0711e-01  3.1225e-16  -7.0711e-01  
-5.0000e-01  7.0711e-01  5.0000e-01
```

```
d =
```

```
Diagonal Matrix
```

```
0.58579      0      0  
0  2.00000      0  
0      0  3.41421
```

```
> omega=sqrt(diag(d))'
```

```
omega =
```

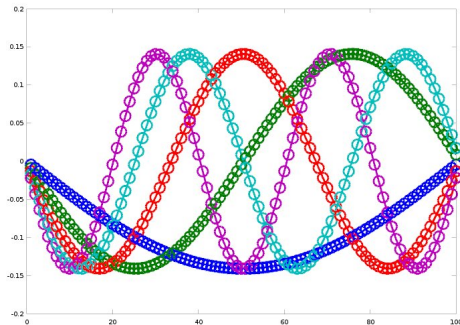
```
0.76537  1.41421  1.84776
```

- Caso $n = 101$ (100 massas)

```
> molas1d  
> [s d]=eig(Kmat,Mmat);  
> omega=sqrt(diag(v));  
> omega(1:5)
```

```
ans =  
0.031104  
0.062200  
0.093281  
0.124339  
0.155368
```

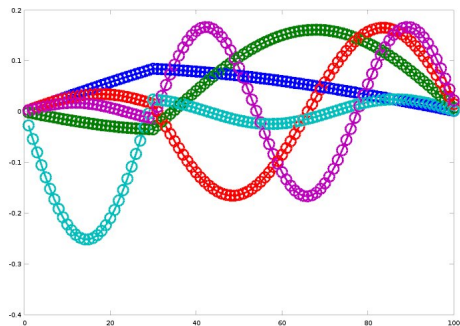
```
>plot([s(:,1:5)],'-o',"markersize",16,...  
> "linewidth",3)
```



- As frequências e modos variam com a distribuição de massa e de rigidezes das molas, vejamos o caso anterior com uma concentração de massa no nó 30 ($m(30)=100$).

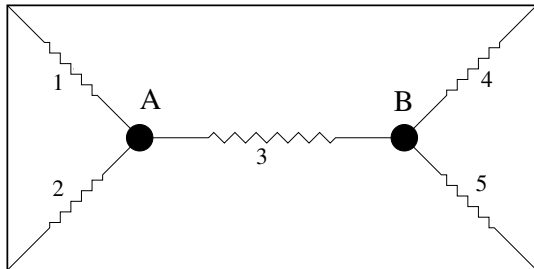
```
>plot([s(:,1:5)],'-o',"markersize",16,...  
> "linewidth",3)
```

```
> omega(1:5)  
ans =  
0.018657  
0.047302  
0.089745  
0.107834  
0.133773
```



Estruturas bidimensionais:

Consideremos agora o sistema de massas e molas da figura na caixa $[0, 4] \times [0, 2]$. Todas as molas estão na sua configuração relaxada quando $x^A = (1, 1)^T$ e $x^B = (3, 1)^T$. As constantes das molas diagonais (1, 2, 4 e 5) é a mesma k_d , conhecida, e a constante da mola horizontal é k_h .



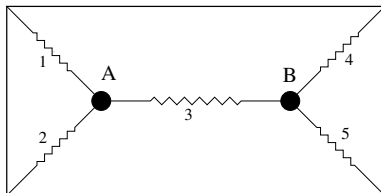
Seu $u = (u_{A1}, u_{A2}, u_{B1}, u_{B2})^T$ o vetor de deslocamentos incógnita, a energia elástica pode se escrever $E = (1/2)u^T K u$ e o sistema dinâmico cumpre, como antes,

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + K u = f$$

sendo $M = \text{diag}(m_A, m_A, m_B, m_B)$.

Programa para construir K e M : caixac2.m

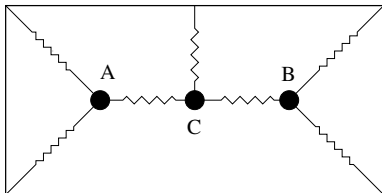
```
conec=[1 6; 1 3; 1 2; 2 5; 2 4];      loc2glo=[2*na-1,2*na,2*nb-1,2*nb];
coord=[1 1; 3 1; 0 0;4 0;4 2;0 2];   for j=1:4
kmola=ones(5,1); m=[1; 1];          for k=1:4
                                     jglo=loc2glo(j);
                                     kglo=loc2glo(k);
                                     Kglo(jglo,kglo)=Kglo(jglo,kglo)+Kloc(j,k);
                                     end
                                     end
                                     end
for ib=1:nb
Kloc=zeros(4,4);
na=conec(ib,1); nb=conec(ib,2);      Kmat=Kglo(1:4,1:4);
Xa=coord(na,:)' ; Xb=coord(nb,:)' ; Mmat=diag([m(1) m(1) m(2) m(2)]);
d=Xb-Xa; l0=norm(d);
kk=kmola(ib)/(l0^2);
aux=d*d';
Kloc(1:2,1:2)=kk*aux;
Kloc(1:2,3:4)=-kk*aux;
Kloc(3:4,1:2)=-kk*aux;
Kloc(3:4,3:4)=kk*aux;
%Kloc contem a matriz de rigidez
% da mola ib
```



```

> caixac2
> [s v]=eig(Kmat,Mmat)
s =
    0.00000    0.70711    0.00000    0.70711
    1.00000    0.00000    0.00000    0.00000
    0.00000    0.70711    0.00000   -0.70711
    0.00000    0.00000    1.00000    0.00000
v =
Diagonal Matrix
    1.00000         0         0         0
         0    1.00000         0         0
         0         0    1.00000         0
         0         0         0    3.00000

```



caixac3.m

```

conec=[1 4;1 8;1 2;2 3;...
       3 5;3 6;2 7];
coord=[1 1;2 1;3 1;0 0;4 0;...
       4 2;2 2;0 2];
kmola=ones(7,1); m=[1; 2; 3];
kmola(7)=0;
...
igual a caso anterior
...
Kmat=Kglo(1:6,1:6);
Mmat=diag([m(1) m(1) m(2) m(2)...
           m(3) m(3)]);

```

```

> caixac3
> [s d]=eig(Kmat,Mmat)
s =
    0.000  -0.272   0.000   0.000  -0.408   0.871
    0.000   0.000   0.000  -1.000   0.000   0.000
    0.000  -0.468   0.000   0.000  -0.408  -0.337
   -0.707  -0.000   0.000   0.000  -0.000   0.000
    0.000  -0.402   0.000   0.000   0.408   0.065
    0.000   0.000   0.577   0.000   0.000   0.000
d =
-3.32e-31    0    0    0    0    0
    0 0.279    0    0    0    0
    0    0 0.333    0    0    0
    0    0    0 1.000    0    0
    0    0    0    0 1.000    0
    0    0    0    0    0 2.387
>om=sqrt(diag(d))'
om =
    0.0 0.528 0.577 1.0 1.0 1.54513

```