SME0305 - 2016

Gustavo C. Buscaglia / Roberto F. Ausas

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com
ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

O comando `eig` e o método de Francis

Teorema: Se A e B, matrizes $n \times n$, são **semelhantes**, i.e., satisfazem

$$B = S^{-1} A S \ , \qquad \text{ou} \qquad A = S B S^{-1}$$

para alguma S não singular, e (λ, v) é auto-par de A, então $(\lambda, S^{-1} v)$ é auto-par de B.

Definição: Uma matriz A é **diagonalizável** se ela é semelhante a uma matriz diagonal. Para isto, deverá existir uma matriz S não singular e uma matriz

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

(os λ's podem ser repetidos) tais que

$$A = S \Lambda S^{-1} \ .$$

O comando `eig` de Octave calcula justamente essa fatoração:

```
[S Lam]=eig(A)      --->   A=S*Lam*inv(S)
```

- As colunas de S são os autovetores de A correspondentes a cada autovalor.
- Se A é simétrica, `Lam` é real e S ortogonal.
- Em geral, tanto S como `Lam` são complexas, mas se A é real os autovalores aparecem em pares conjugados.

No cálculo de estruturas é usual encontrar o problema generalizado de autovalores

$$A\,v = \lambda\,M\,v$$

onde M é uma matriz definida positiva (“matriz de massas”).

O comando `eig` de Octave também resolve esse problema:

```
[S Lam]=eig(A,M)     --->   A=M*S*Lam*inv(S)
```

- As colunas de S são os autovetores de A correspondentes a cada autovalor, i.e.,

  ```
  A*S(:,k)-Lam(k,k)*M*S(:,k)     e' igual a zero.
  ```

- Se A é simétrica, `Lam` é real.

Agora vamos ver um dos métodos que estão por trás do comando `eig`, das slides do Prof. Afonso Paiva Neto.

Método de Francis

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ **simétrica**, vamos usar a Decomposição QR para calcular **todos** os seus autovalores e autovetores.

Método de Francis

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ **simétrica**, vamos usar a Decomposição QR para calcular **todos** os seus autovalores e autovetores.

Processo:

- $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$

Método de Francis

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ **simétrica**, vamos usar a Decomposição QR para calcular **todos** os seus autovalores e autovetores.

Processo:

- $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \ \Rightarrow \ \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$
- $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \ \Rightarrow \ \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$

Método de Francis

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ **simétrica**, vamos usar a Decomposição QR para calcular **todos** os seus autovalores e autovetores.

Processo:

- $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$
- $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$
- $\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_3 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3$

Método de Francis

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ **simétrica**, vamos usar a Decomposição QR para calcular **todos** os seus autovalores e autovetores.

Processo:

- $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$
- $\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$
- $\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_3 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3$
- $\vdots$
- $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}$
- $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k$ possuem os mesmos autovalores.

Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k$ possuem os mesmos autovalores.

Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\, \mathbf{A}_{k-1}\, \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\, \mathbf{A}_{k-2}\, \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\cdots\mathbf{Q}_{1}^{\top}\, \mathbf{A}_1\, \mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{\top} \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^\top\ \mathbf{A}_{k-1}\ \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top\ \mathbf{A}_{k-2}\ \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\ \vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top \cdots \mathbf{Q}_1^\top\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1})^\top\ \mathbf{A}\ (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1})
\end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^\top\mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes.

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Proposição

A sequência $\mathbf{A}_k$ *converge para uma matriz diagonal.*

Método de Francis

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Proposição

A sequência $\mathbf{A}_k$ *converge para uma matriz diagonal.*

Logo, os elementos da **diagonal de $\mathbf{A}_k$** fornecem uma aproximação para os **autovalores** de $\mathbf{A}$, enquanto que as **colunas da matriz**:

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}}$$

uma aproximação dos seus respectivos **autovetores**.

Método de Francis

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$

Método de Francis

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $\max_{i<j} \left\{ |a_{ij}| \right\} < \varepsilon$

Método de Francis

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $\max_{i<j} \left\{ |a_{ij}| \right\} < \varepsilon$
3. $\mathit{off}\,(\mathbf{A}) < \varepsilon$, com

$$\mathit{off}\,(\mathbf{A}) = \sqrt{\|\mathbf{A}\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2}$$

MATLAB – Método de Francis

```
function [V,D] = francis(A,tol)

n = size(A,1);
V = eye(n);
erro = inf;

while erro>tol
    [Q,R] = mgs(A);
    A = R*Q;
    V = V*Q;
    erro = max(max(abs(tril(A,-1))));
end

D = diag(A);
```