SME0305 - 2016

Gustavo C. Buscaglia / Roberto F. Ausas

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com
ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

Programa:

1. Matrizes na engenharia: O sistema linear de um circuito hidráulico.
2. Algoritmos básicos. Introdução a Octave. Representação de grafos.
3. Representação de números no computador.
4. Matrizes na engenharia: Circuitos hidráulicos, resolução numérica.
5. A fatoração LU. Decomposição QR e Cholesky.
6. Sistemas superdeterminados, regressão linear e mínimos quadrados.
7. Iterações na engenharia. Convergência, tolerância.
8. Métodos iterativos de resolução de sistemas lineares.
9. Matrizes na engenharia: Caminhadas aleatórias e probabilidades. Cordas e membranas em tensão.
10. Autovalores na engenharia: Modos de vibração.
11. Métodos numéricos de cálculo de autovalores.

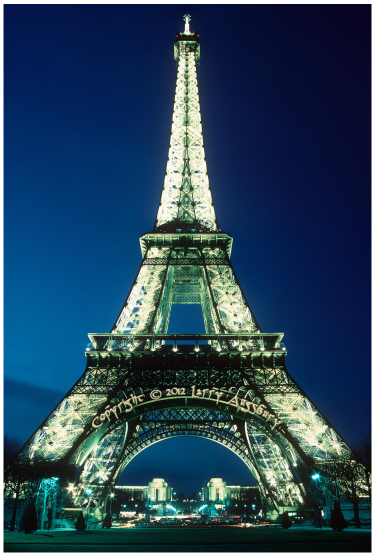
Mecanismos de avaliação:

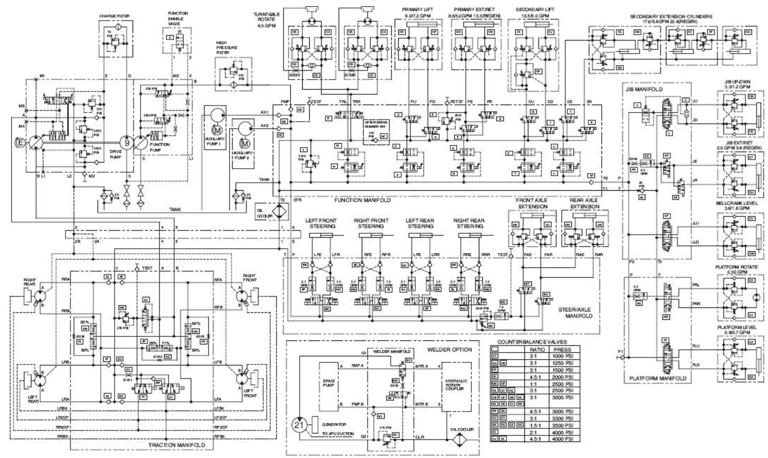
- Provas **semanais** e **objetivas** de 40 minutos de duração. Necessário trazer calculadora.
- Uma prova **substitutiva** na última semana.
- A média de provas se calcula tirando a média das provas do semestre com a nota da sub (se a média do semestre for maior que a nota da sub, fica a média do semestre). Para passar, a média de provas obtida dessa maneira deve superar 4.9.
- **Bonus sub:** Aqueles alunos cuja média do semestre seja superior a 4.9 são incentivados a fazer a prova sub com um bonus de 1 ponto na média final, apenas sob a condição de tirar 5 ou mais na sub.
- **Bonus supervivência:** Os alunos cuja média de provas seja superior a 4.9 obterão um bonus por terem sobrevivido e não precisarem ser "recuperados". Para esse bonus não é condição tirar 5 ou mais na sub (nem sequer precisa fazé-la). O valor do bonus será de aproximadamente 1 ponto.

Bibliografia:

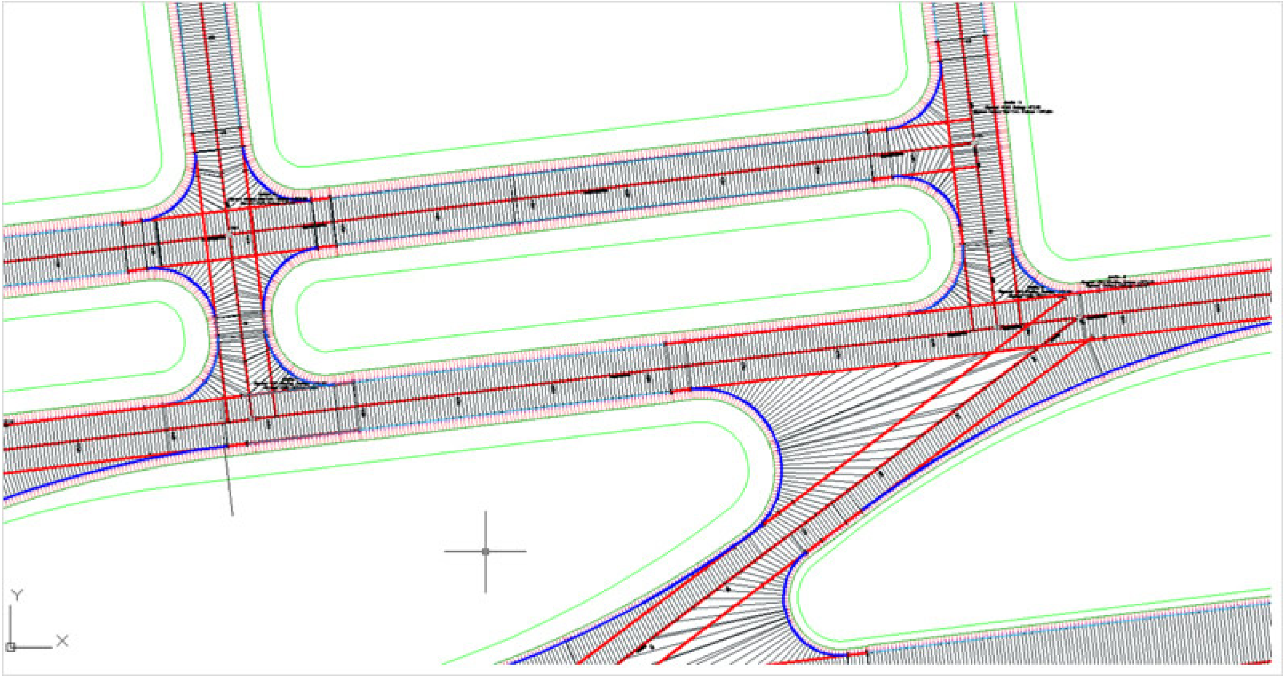
A. Quarteroni et al, *Scientific Computing with MATLAB and Octave.*

Engenheiros se ocupam da análise, do desenho, da otimização de sistemas complexos, compostos por centenas, milhares ou milhões de componentes.

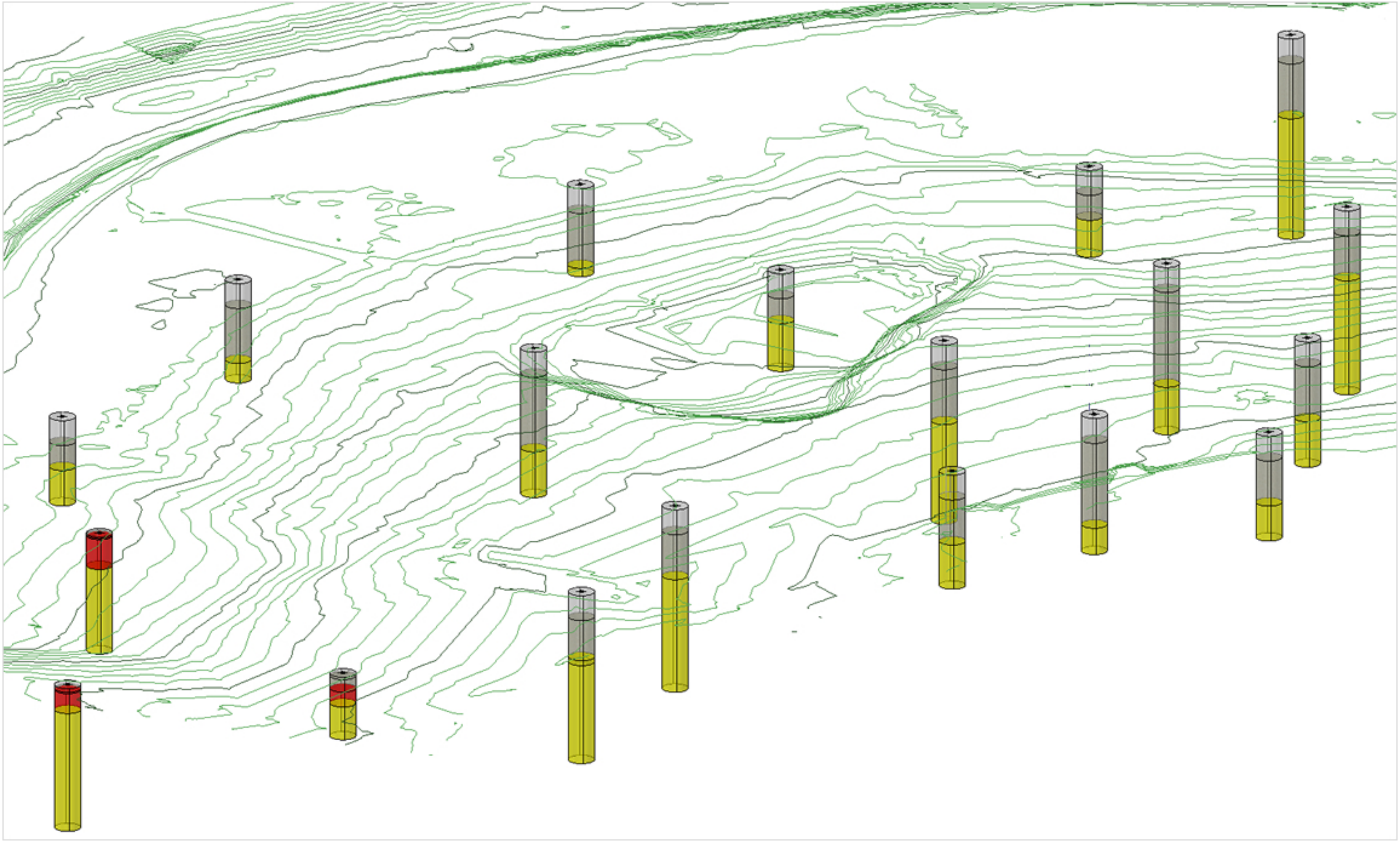




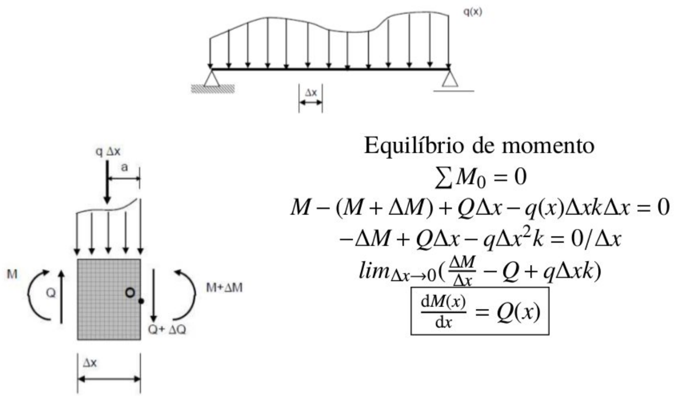
Engenheiros passam muito tempo olhando para telas como essa:

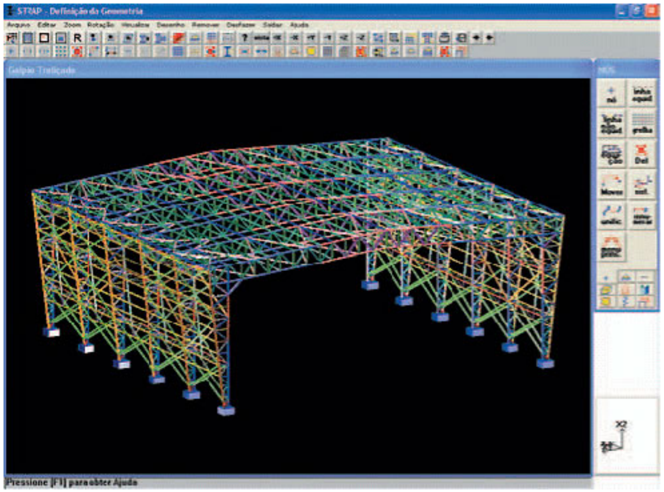


Ou essa:



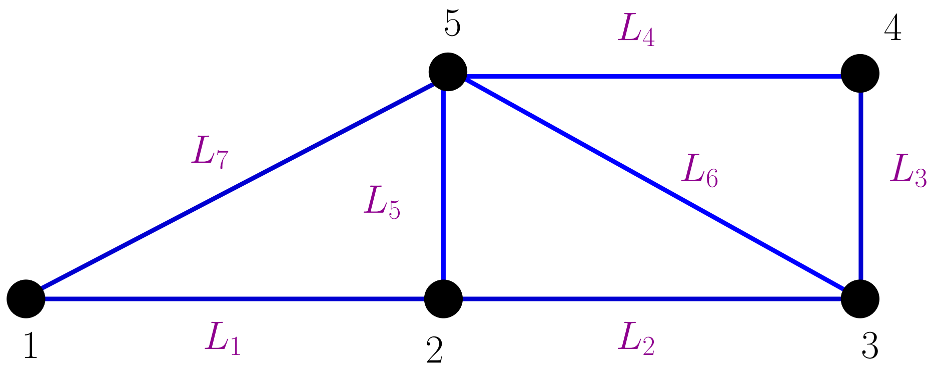
- Como é o caminho que vai do componente simples (um cano, uma barra, uma viga) ao sistema composto (um encanamento, uma treliça, um prédio)?
- Como é o caminho que vai da fórmula simples escrita na lousa ($V = R\,I$, ou $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, ou $Q = dM/dx$) ao software usado no mercado?
- O que a matemática, e em particular a álgebra linear, tem a ver com tudo isto?





Exemplo:

Consideremos a rede hidráulica, por enquanto sem conexões externas:



Nesta rede temos:

- $n_c = 7$ canos
- $n_p = 5$ nós

Objetivo: Achar as pressões em cada nó, $\mathbf{p} = [p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]^T$, e as vazões em cada cano $\mathbf{Q} = [Q_1 \ldots Q_7]$.

Conceitos necessários:

- Comportamento de **um cano** ("lei constitutiva").
- Condições de acoplamento.

Comportamento de um cano (lei constitutiva)

Para cada cano r, que conecta os nós i e j, vamos considerar a lei de perda de pressão em função da vazão:

$$\Delta p_{ij} = p_i - p_j = k\, L_r\, Q_r \quad \Rightarrow \quad Q_r = \frac{1}{k\, L_r}\,(p_i - p_j) \tag{1}$$

e chamaremos $C_r = \frac{1}{k\, L_r}$ para simplificar.

- k é uma constante de resistência igual para todos os canos.
- L_r é o comprimento de cada cano.
- A vazão é positiva quando vai de i a j.

Condições de acoplamento

- A **unicidade da pressão** em cada nó.
- A **conservação da massa**, que impõe:

$$\sum_{\forall\, r \text{ que tem o nó } i} Q_r^{(i)} \quad = \quad 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n_p \tag{2}$$

Teremos **uma** equação por cada nó, e cada uma destas equações envolverá as pressões nos nós.

Sistema de equações

Vamos percorrendo cada nó para escrever a sua equação:

$$
\begin{aligned}
\text{Nó 1}: \sum Q_r^{(1)} &= C_1(p_1 - p_2) + C_7(p_1 - p_5) &&= 0 \\
\text{Nó 2}: \sum Q_r^{(2)} &= C_1(p_2 - p_1) + C_5(p_2 - p_5) + C_2(p_2 - p_3) &&= 0 \\
\text{Nó 3}: \sum Q_r^{(3)} &= C_2(p_3 - p_2) + C_6(p_3 - p_5) + C_3(p_3 - p_4) &&= 0 \\
\text{Nó 4}: \sum Q_r^{(4)} &= C_3(p_4 - p_3) + C_4(p_4 - p_5) &&= 0 \\
\text{Nó 5}: \sum Q_r^{(5)} &= C_7(p_5 - p_1) + C_5(p_5 - p_2) + C_6(p_5 - p_3) + C_4(p_5 - p_4) &&= 0
\end{aligned}
$$

5 equações e 5 incógnitas

Agora vamos ordenar um pouco o sistema:

Sistema de equações

Ordenando resulta

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(C_1 + C_7)\,{\color{red}p_1} & - & C_1\,p_2 & + & 0\,p_3 & + & 0\,p_4 & - & C_7\,p_5 & = & 0 \\
-C_1\,p_1 & + & (C_1 + C_2 + C_5)\,{\color{red}p_2} & - & C_2\,p_3 & + & 0\,p_4 & - & C_5\,p_5 & = & 0 \\
0\,p_1 & - & C_2\,p_2 & + & (C_2 + C_3 + C_6)\,{\color{red}p_3} & - & C_3\,p_4 & - & C_6\,p_5 & = & 0 \\
0\,p_1 & + & 0\,p_2 & - & C_3\,p_3 & + & (C_3 + C_4)\,{\color{red}p_4} & - & C_4\,p_5 & = & 0 \\
-C_7\,p_1 & - & C_5\,p_2 & - & C_6\,p_3 & - & C_4\,p_4 & + & (C_4 + C_5 + C_6 + C_7)\,{\color{red}p_5} & = & 0
\end{array}
$$

Sistema de equações em forma matricial

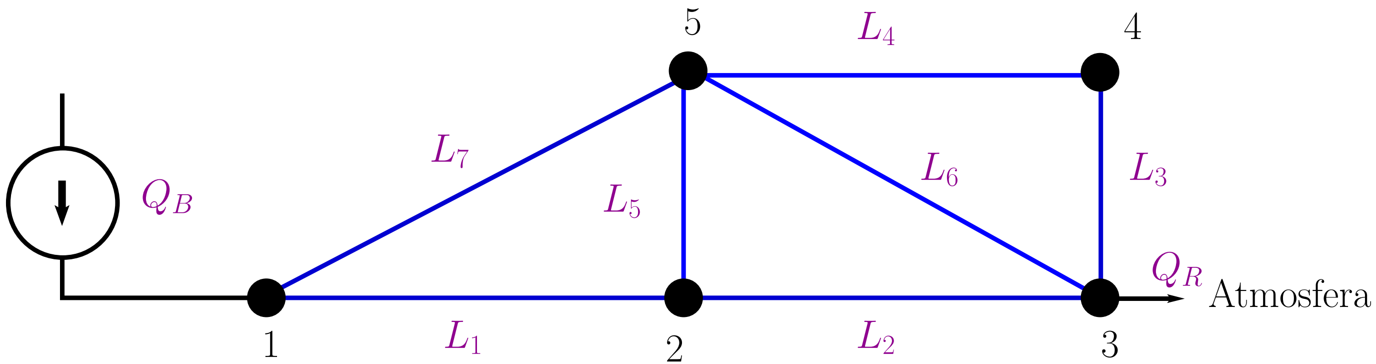
$$\begin{pmatrix} C_1+C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1+C_2+C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & -C_2 & C_2+C_3+C_6 & -C_3 & -C_6 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3+C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4+C_5+C_6+C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz é simétrica
- A soma dos elementos de qualquer linha/coluna é zero
- A matriz **é singular**

Que aconteceu?

Resposta: A rede ainda não foi conectada!

Vamos conectá-la, **por exemplo**, assim:



- Se injeta uma vazão Q_B no nó 1
- Se conecta o nó 3 à atmosfera $\Rightarrow$ já sabemos que: $p_3 = 0$ ☺
  $\rightarrow$ agora teremos uma vazão Q_R a determinar: uma nova incógnita ☹.

Precisamos incorporar essa informação ao sistema:

Conectando a rede

- Se estamos injetando no nó 1, então, a sua equação agora seria:

$$\sum Q_r^{(1)} = (C_1 + C_7)\, p_1 - C_1\, p_2 + 0\, p_3 + 0\, p_4 - C_7\, p_5 = Q_B \tag{3}$$

- Similarmente, a equação para o nó 3 agora seria:

$$\sum Q_r^{(3)} = 0\, p_1 - C_2\, p_2 + (C_2 + C_3 + C_6)\, p_3 - C_3\, p_4 - C_6\, p_5 = Q_R \tag{4}$$

(em que Q_R é a **nova** incógnita).

- Se **já sabemos** que $p_3 = 0$, então, também teremos **mais uma** equação:

$$0\, p_1 + 0\, p_2 + 1\, p_3 + 0\, p_4 + 0\, p_5 = 0 \tag{5}$$

Conectando a rede

Agora, se apenas estamos interessados em achar as pressões, podemos **ignorar** por enquanto a eq. (4) e ficar com a eq. (5):

Resultando o novo sistema de equações (ainda de 5×5):

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \quad + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja matriz não é singular!

Vejamos um exemplo concreto:

Cano	k [bar s / m^4]	L_r [m]	C_r [bar s / m^3]
1	0.1	5	2
2	0.1	5	2
3	0.1	10	1
4	0.1	5	2
5	0.1	10	1
6	0.1	5	2
7	0.1	5	2

E vamos considerar $Q_B = 3$ m^3/s

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonamento:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_5 \leftarrow \ell_5 + \frac{1}{2}\ell_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 6 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_5 \leftarrow \ell_5 + \frac{1}{2}\ell_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 5 & \frac{9}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_3}$$

Escalonamento:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 5 & \frac{9}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_5 \leftarrow \ell_5 + 3\ell_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & \frac{9}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_5 \leftarrow \ell_5 + \frac{2}{3}\ell_4}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{9}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_i \leftarrow \ell_i / a_{ii}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{27}{44} \end{array}\right)$$

Resolvemos o sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{27}{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrcccr} 1\,p_1 & -\ \frac{1}{2}\,p_2 & +\ 0\,p_3 & +\ 0\,p_4 & -\ \frac{1}{2}\,p_5 & = & \frac{3}{4} & \rightarrow & p_1 = \frac{123}{88} \\ & 1\,p_2 & -\ \frac{1}{2}\,p_3 & +\ 0\,p_4 & -\ \frac{1}{2}\,p_5 & = & \frac{3}{8} & \rightarrow & p_2 = \frac{60}{88} \\ & & +\ 1\,p_3 & +\ 0\,p_4 & +\ 0\,p_5 & = & 0 & \rightarrow & p_3 = 0 \\ & & & +\ 1\,p_4 & -\ \frac{2}{3}\,p_5 & = & 0 & \rightarrow & p_4 = \frac{54}{132} \\ & & & & 1\,p_5 & = & \frac{27}{44} & \rightarrow & p_5 = \frac{27}{44} \end{array}$$

Cálculo da vazão que vai para o reservatório, Q_R:

Lembremos que a equação para o nó 3 era:

$$\sum Q_r^{(3)} = \quad 0\,p_1 \quad - \quad C_2\,p_2 \quad + \quad (C_2 + C_3 + C_6)\,p_3 \quad - \quad C_3\,p_4 \quad - \quad C_6\,p_5 = \quad Q_R$$

ou, colocando os valores da tabela

$$\sum Q_r^{(3)} = \quad 0 \quad - \quad 2\,p_2 \quad + \quad 5\,p_3 \quad - \quad 1\,p_4 \quad - \quad 2\,p_5 = \quad Q_R$$

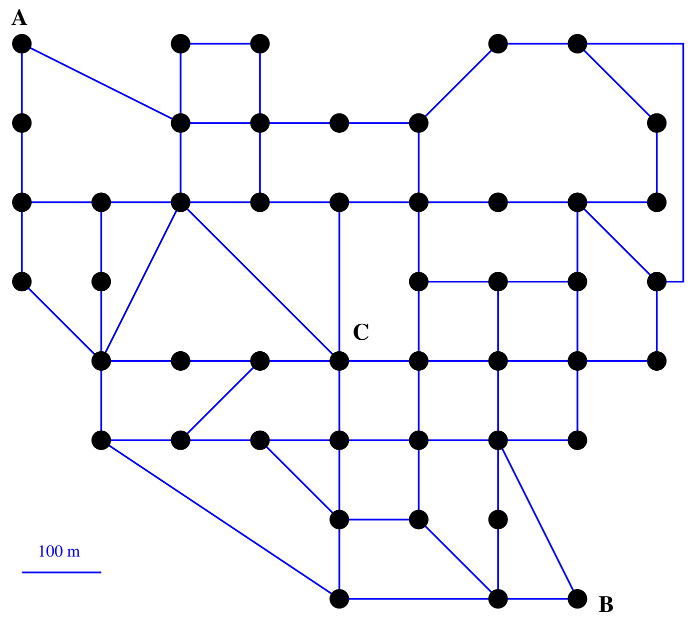
e inserindo as pressões que acabamos de achar:

$$Q_R \quad = \quad \sum Q_r^{(3)} = \quad 0 \quad - \quad 2\,\tfrac{60}{88} \quad + \quad 0 \quad - \quad 1\,\tfrac{54}{132} \quad - \quad 2\,\tfrac{27}{44} \quad = \quad -3$$

ou seja, pelo nó 3 está saindo exatamente o que injectamos no nó 1.

Problemas de cálculo numérico:

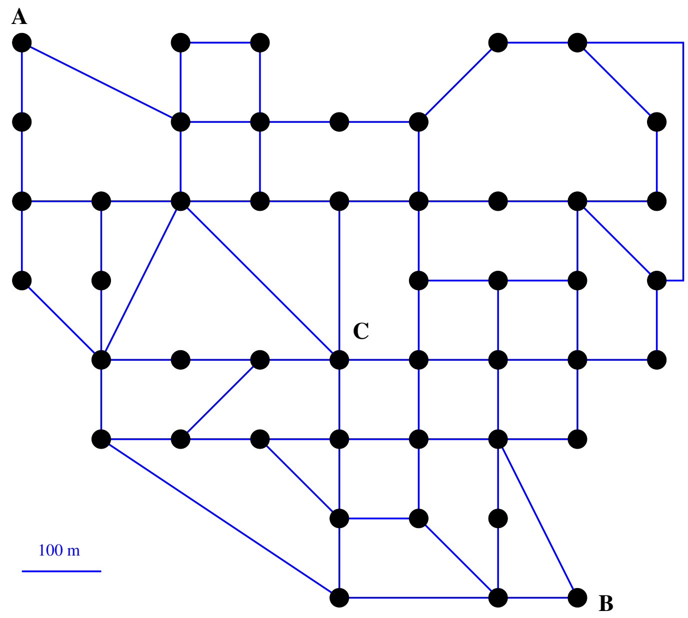
Considere a rede **hidráulica** da figura:



Problema 1: Sabendo que à rede ingressa uma vazão Q_A pelo ponto A, e que o ponto B descarrega a pressão atmosférica, calcular pressões e vazões. **Desenvolver um programa para realizar isto rapidamente (segundos)**.

$\Longrightarrow$ **Problema "direto"**

Considere a rede **hidráulica** da figura:



Problema 2: Cada cano tem uma probabilidade r de estar entupido, em cujo caso a constante k de resistência se multiplica por 10. Qual a probabilidade de algum ponto da rede superar a pressão máxima admissível de 3 atmosferas?

$\Longrightarrow$ **Problema "probabilístico direto"**

Problema 3: A rede corresponde a um bairro, ao qual se fornece água pelo nó A, a 3 atmosferas de pressão. Cada um dos outros nós é uma residência, com um consumo de 600 litros/dia.

Problema direto: Qual a pressão que chega a cada residência?

Cada cano tem uma probabilidade r de estar entupido, em cujo caso a constante k de resistência se multiplica por 10. A rede foi desenhada, com o valor nominal de k em todos os canos, de tal maneira que nenhuma residência receba uma pressão de água inferior a 0.5 atmosferas.

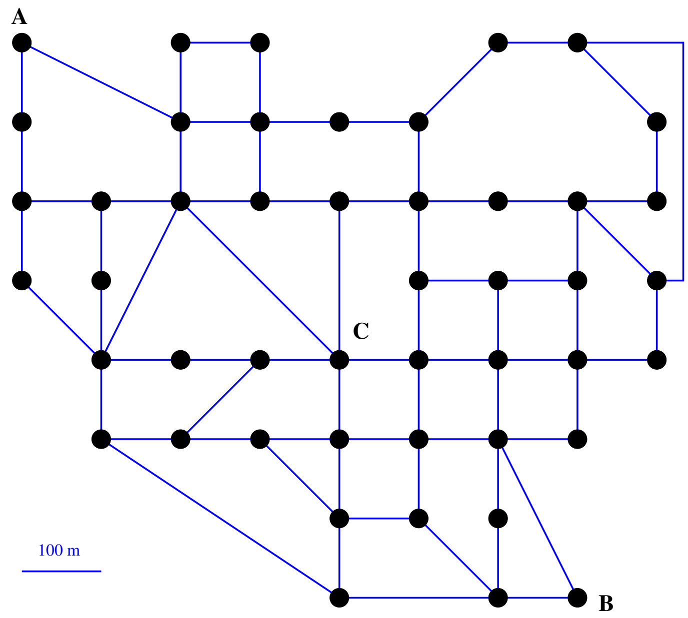
Problema probabilístico: Conhecida r, qual a probabilidade de alguma residência receber pressão inferior à mínima admissível?

O valor de r depende da frequencia de manutenção (limpeza) da rede:

Frequencia (vezes/ano)	r	Custo (kR$)
1	0.20	5
2	0.10	10
3	0.06	15
4	0.04	20
6	0.03	30
8	0.02	40
12	0.01	60

Problema probabilístico inverso: Determinar a frequencia mínima de limpeza tal que a probabilidade de alguma residência receber pressão muito baixa seja menor que 2%.

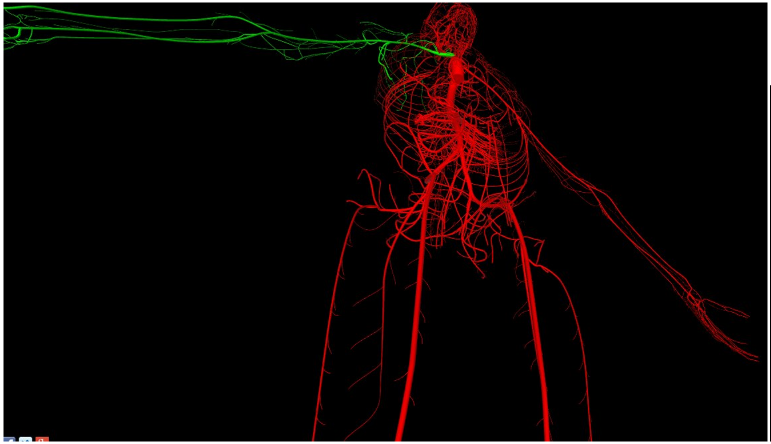
Considere a rede **de canais abertos** da figura:

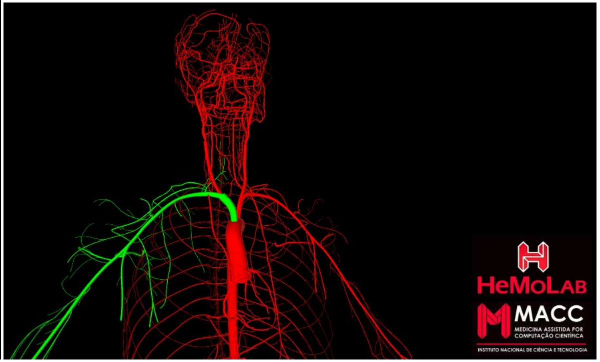


Problema 4: Cada canal é capaz de levar uma vazão máxima $Q_{\max}$, acima da qual transborda e gera alagamentos. Os valores de $Q_{\max}$ são conhecidos para cada canal, de fato todos os conectados com os nós A, B ou C tem $Q_{\max} = 200 m^3/h$, e todos os outros tem $Q_{\max} = 50 m^3/h$.
Qual a vazão máxima que pode ser transferida do ponto A ao ponto B da rede?

$\Longrightarrow$ **Problema de "fluxo máximo"**

Outra red muito importante:





`www.hemolab.lncc.br/adan-web`