SME0305 - 2016

Gustavo C. Buscaglia / Roberto F. Ausas

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com
ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

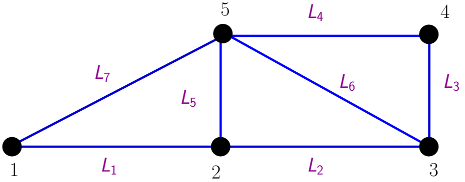
O sistema linear de uma rede hidráulica

Objetivos:

- Entender a modelagem de distintos sistemas físicos tais como redes hidráulicas ou elétricas do ponto de vista da Algebra Linear;
- Aprender como resolver tais problemas de maneira sistemática no computador;

O que temos estudado até agora ...

Consideramos por exemplo redes do tipo mostrado na figura



Nesta rede temos:

- n_c canos ou arestas e n_v nós ou vértices

A **conservação da massa** diz que:

$$\sum_{\forall\, r \text{ que tem o nó } i} Q_r^{(i)} \;=\; 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n_p$$

Teremos **uma** equação por cada nó:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Nó 1}: \sum Q_r^{(1)} & = C_1(p_1 - p_2) & + & C_7(p_1 - p_5) & & & & & = & 0 \\
\text{Nó 2}: \sum Q_r^{(2)} & = C_1(p_2 - p_1) & + & C_5(p_2 - p_5) & + & C_2(p_2 - p_3) & & & = & 0 \\
\text{Nó 3}: \sum Q_r^{(3)} & = C_2(p_3 - p_2) & + & C_6(p_3 - p_5) & + & C_3(p_3 - p_4) & & & = & 0 \\
\text{Nó 4}: \sum Q_r^{(4)} & = C_3(p_4 - p_3) & + & C_4(p_4 - p_5) & & & & & = & 0 \\
\text{Nó 5}: \sum Q_r^{(5)} & = C_7(p_5 - p_1) & + & C_5(p_5 - p_2) & + & C_6(p_5 - p_3) & + & C_4(p_5 - p_4) & = & 0
\end{array}
$$

O sistema de equações em forma matricial

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & -C_2 & C_2 + C_3 + C_6 & -C_3 & -C_6 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- A matriz é simétrica
- A soma dos elementos de qualquer linha/coluna é zero
- A matriz **é singular**

A matriz da rede (sem conexões por enquanto) de maneira geral se descreve como

$$A_{ij} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \text{ conectados com } i} C_{ik} & \text{se } i = j \\ -C_r & \text{se } i \neq j \text{, com } i \text{ conectado a } j \text{ por } C_r \\ 0 & \text{se não há conexão entre } i \text{ e } j \end{cases}$$

Observação: *Em geral, um nó estará conectado a um número relativamente pequeno de nós. Isto fará com que a matriz A possua muitos zeros, o que pode ser explorado para salvar memoria e tempo de calculo!!*

Matriz de conectividades

Uma forma "inteligente" de armar a matriz A, utiliza a chamada matriz de conectividades $\texttt{conec} \in \mathbb{N}^{n_c \times 2}$. Esta é uma estrutura muito conveniente para descrever a rede

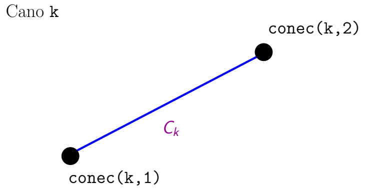
$$\texttt{conec} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Isto é um ingrediente chave no método dos Elementos Finitos!

Olhando para a matriz **global** da rede, a ideia é ir acumulando nela, a matriz **local** associada a cada cano. Para o cano k, de conductividade C_k, teremos uma matriz de 2×2

$$\begin{pmatrix} C_k & -C_k \\ -C_k & C_k \end{pmatrix}$$

Para saber em que posições da matriz global acumular, olhamos para as conectividades



Por exemplo para nossa rede

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 1}} \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 2}}
$$

$$
\begin{pmatrix} C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cano 3}} \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & C_1 + C_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots
$$

$$
\cdots \xrightarrow{\text{Cano 7}} \begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & -C_2 & C_2 + C_3 + C_6 & -C_3 & -C_6 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix}
$$

Montagem da matriz: Algoritmo

O algoritmo para fazer a montagem empregando `conec` é:

```
function A = Assembly(nv, nc, conec, C)
   A = zeros(nv);
   for k=1:nc
     p = conec(k,1);
     q = conec(k,2);
     A(p,p) = A(p,p) + C(k);
     A(p,q) = A(p,q) - C(k);
     A(q,p) = A(q,p) - C(k);
     A(q,q) = A(q,q) + C(k);
   end
end
```

(arquivo `Assembly.m`)

Na lista, a ideia é resolver redes mais complexas, por exemplo de um bairro ou uma cidade completa!

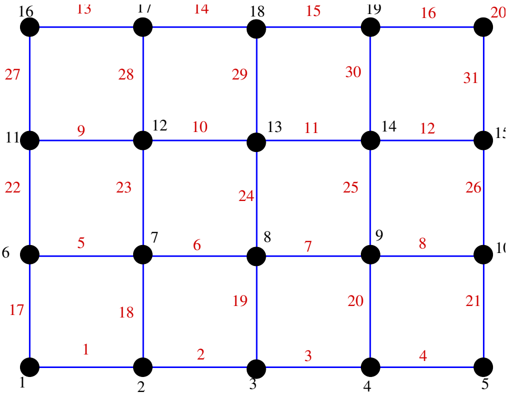
Vamos fornecer a função `redehidra_bairro` que gera uma rede quadrada com `n` nós na horizontal por `m` nós na vertical.

```
> [nv, nc, conec, C, coords] =
redehidra_bairro (n, m, CH, CV)
```

Por exemplo, com `n = 5` e `m = 4`, geramos a matriz de conectividades

$$\mathtt{conec} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 19 & 20 \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

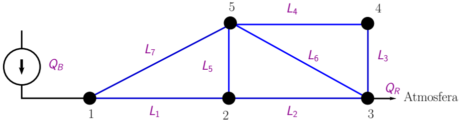
como mostrado na figura:



Conectando a rede

Vamos continuar com o exemplo simples por simplicidade. Agora precisamos remover a singularidade da matriz A conectando um nó à atmosfera, p.e. o nó n_{atm}, fixando a sua pressão ao valor $Pref = 0$.

Também vamos conectar uma bomba que injecta Q_B no nó n_B



$\Rightarrow$ Vamos resolver um novo sistema de equações

$$\widetilde{A}\,\mathbf{p} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 + C_7 & -C_1 & 0 & 0 & -C_7 \\ -C_1 & C_1 + C_2 + C_5 & -C_2 & 0 & -C_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & C_3 + C_4 & -C_4 \\ -C_7 & -C_5 & -C_6 & -C_4 & C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_B \\ 0 \\ Pref \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja matriz não é singular!

De maneira geral podemos descrever a matriz $\widetilde{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ como:

$$\widetilde{A}_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{se } i \neq n_{atm} \\ 0 & \text{se } i = n_{atm} \text{ e } j \neq n_{atm} \\ 1 & \text{se } i = j = n_{atm} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n_{atm} \\ Q_B & \text{se } i = n_B \\ Pref & \text{se } i = n_{atm} \end{cases}$$

i.e., ignoramos a equação do nó conectado à atmosfera e a substituimos por uma equação que diz: $p_{n_{atm}} = Pref$. Para n_v arbitrário

$$
\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n_{atm}} & \cdots & A_{1n_B} & \cdots & A_{1n_v} \\
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{1n_{atm}} & \cdots & A_{1n_B} & \cdots & A_{2n_v} \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
A_{n_B 1} & A_{n_B 2} & \cdots & A_{n_B n_{atm}} & \cdots & A_{n_B n_B} & \cdots & A_{n_B n_v} \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
. & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\
A_{n_v 1} & A_{n_v 2} & \cdots & A_{n_v n_{atm}} & \cdots & A_{n_v n_B} & \cdots & A_{n_v n_v}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_{n_{atm}} \\ . \\ . \\ . \\ p_{n_B} \\ . \\ . \\ . \\ p_{n_v}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ Pref \\ . \\ . \\ . \\ Q_B \\ . \\ . \\ . \\ 0
\end{pmatrix}
$$

Conectando a rede em Octave

A função de Octave que arma o sistema linear de equações a ser resolvido é:

```matlab
function [Atilde b] = BuildSystem(nv,A,QB,nB,Pref,natm)
  Atilde = A;
  b = zeros(nv,1);
  Atilde(natm,:) = 0.0;
  Atilde(natm,natm) = 1.0;
  b(:) = 0.0;
  b(natm) = Pref;
  b(nB) = QB;
end
```

(arquivo `BuildSystem.m`)

Agora podemos resolver o sistema e achar as pressões em cada nó

$$\mathbf{p} = \widetilde{A}^{-1}\,\mathbf{b}$$

que em Octave se faz usando a **“barra”** $\backslash$:

```
> p = Atilde \ b
```

Que acontece se eu pegar essa pressão e multiplicar pela matriz A original?, i.e.

```
> desbal = A * p
```

Post-processos da solução

- **Gráfico das pressões sobre a rede:**

  Um passo importante após ter resolvido um problema é o de visualizar os resultados. Na lista 3 se pede utilizar várias funções de Octave que permitirão visualizar as pressões, as vazões e as linhas de pressão constante.

- **Cálculo da conductância equivalente:**

  Pode ser de utilidade calcular qual é a conductância equivalente entre dois pontos da rede. Se consideramos a diferença de pressão entre o ponto em que foi conectada a bomba e o ponto conectado à atmosfera, a conductância seria

  ```
  > Ceq = QB / (p(nB) - Pref)
  ```

- **Vazão em cada cano:**

Definindo a matriz de conductancias $K \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ (que é diagonal) e uma outra matriz auxiliar $D \in \mathbb{R}^{n_c \times n_v}$:

$$K_{ij} = \begin{cases} C_{r_i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{no resto} \end{cases} \quad , \quad D_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = conec(k,1) \\ -1 & \text{se } j = conec(k,2) \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Podemos calcular o vetor de vazões nos canos $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n_c}$

$$\mathbf{J} = K\,(D\,\mathbf{p}) = K\,\mathbf{d}$$

```
> vazao = K * D * p
```

- **Potência dissipada na rede:**

  Em cada cano da rede: $\Phi_r = J_r \Delta p_r$ (=vazão no cano $\times$ diferença de pressão no cano). Então, somando sobre todos os canos, a potência total perdida será:

$$\Phi_T = \sum_{r=1}^{n_c} J_r d_r = \mathbf{d}^T \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_T = (D\mathbf{p})^T (KD\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T (D^T KD)\mathbf{p}$$

```
> potencia = p’ * (D’ * K * D) * p
```

Comentários finais

No estudo das redes hidráulicas estamos fazendo uma suposição muito forte:

O sistema tem um comportamento linear

mas, lembremos que **é uma aproximação de modelagem**, já que boa parte dos escoamentos relevantes na engenharia são turbulentos e por tanto não lineares.

A resolução de circuitos elétricos é totalmente analoga à das redes hidráulicas, e de fato neste caso a aproximação de linearidade é muito boa.

A linearidade, nos permitirá desenvolver alguns conceitos de algebra linear, o que será estudado em próximas aulas.