SME0305 - 2016

Gustavo C. Buscaglia / Roberto F. Ausas

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com
ICMC - Ramal 736628, rfausas@gmail.com

A decomposição SVD

Valores singulares e vetores singulares

- Um real não negativo σ é **valor singular** de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se e só se existem vetores unitários $u \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$A\,v = \sigma\,u\ , \qquad \text{e} \qquad A^T\,u = \sigma\,v\ . \tag{1}$$

Os vetores u e v são chamados de vetores singulares para σ **a esquerda** e **a direita**, respectivamente.

- **Teorema:** Toda matriz real $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser fatorada como

$$A = U \Sigma V^T \tag{2}$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais, e a matriz $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é diagonal, satisfazendo $\Sigma_{11} \geq \Sigma_{22} \geq \ldots \Sigma_{rr} > 0$, e todos os elementos restantes são zero. O inteiro $r \leq \min(m, n)$ é o posto de A. Usaremos também a notação $\sigma_i = \Sigma_{ii}$ para os valores singulares.

Exo. 1: Mostrar que, se se cumpre (2), então as colunas de U e de V são vetores singulares de A, a esquerda e direita respectivamente, e os elementos diagonais de Σ são valores singulares de A.

Exo. 2. Representação reduzida: Sejam U_L e V_L as matrizes formadas pelas r primeiras colunas de U e V, respectivamente, onde r é o **posto** de A. Então

$$A = U_L \overline{\Sigma} V_L^T , \tag{3}$$

onde $\overline{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é

$$\overline{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \tag{4}$$

- Denotemos por $u^{(i)}$ a coluna número i de U, e por $v^{(i)}$ a coluna número i de V. Quando resultar conveniente e não gerar confusão, usaremos também u_i e v_i para os mesmos fins.

Exo. 3. Ação sobre um vetor z:

Dizer se alguma das identidades abaixo está errada:

$$\begin{aligned} Az &= A\left[(v_1^T z)v_1 + \ldots + (v_n^T z)v_n\right] \\ &= (v_1^T z)Av_1 + \ldots + (v_n^T z)Av_n \\ &= \sigma_1(v_1^T z)u_1 + \ldots + \sigma_r(v_r^T z)u_r \\ &= \left[\sigma_1 u_1 v_1^T + \ldots + \sigma_r u_r v_r^T\right] z \end{aligned}$$

Supondo que a última esteja correta, responda se ela é suficiente para poder afirmar que

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, u^{(i)} \left(v^{(i)}\right)^T$$

Exo. 4: Os seguintes itens são verdadeiros?

- As colunas $r+1$ a n de V são uma **base ortogonal** do **núcleo** de A.
- As colunas 1 a r de U são uma **base ortogonal** da **imagem** de A.
- A diagonal de Σ tem comprimento $\min(m, n)$, quando A é matriz $m \times n$.
- Dada a decomposição $A = U \Sigma V^T$, o posto de A é r se e só se os elementos $r+1$ a $\min(m, n)$ da diagonal de Σ são zero, e os primeiros r elementos positivos.
- (Opcional) A projeção ortogonal de um vetor y na imagem de A é o vetor $U_L U_L^T y$, onde U_L é a matriz formada pelas primeiras r colunas de U.
- (Opcional) Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz cujas colunas são linearmente independentes. Então a projeção ortogonal de um vetor y na imagem de A é dada por $A\,(A^T A)^{-1} A^T y$.

- **Teorema:** Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz cuja decomposição SVD é dada por $A = U\Sigma V^T$. A melhor aproximação a A com matrizes de posto $k < r$ é dada por

$$\tilde{A} = U\tilde{\Sigma}V^T \ , \tag{5}$$

onde $\tilde{\Sigma}$ é também diagonal, seus elementos diagonais 1 a k coincidem com os de Σ, e o resto são zero.

- **Teorema:** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz quadrada, com decomposição $A = U\Sigma V^T$. A matriz **ortogonal** mais próxima a A é, então, a matriz $Q = UV^T$.

- A **pseudoinversa** de uma matriz A, que denotaremos por $A^\dagger$, é definida por

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T \ , \tag{6}$$

onde $\Sigma^\dagger$ é a matriz diagonal cujos elementos valem $1/\Sigma_{ii}$ se $\Sigma_{ii} \neq 0$, e zero se $\Sigma_{ii} = 0$.

- O problema de **mínimos quadrados**

$$Ax = b$$

com A arbitrária (de posto incompleto, em particular), se resolve de maneira simples como

$$x = A^\dagger b \ . \tag{7}$$

Quando A é de posto completo a solução coincide com a obtida com a fatoração QR, que é solução de

$$A^T A x = A^T b \; . \tag{8}$$

Quando A é de posto incompleto, e a fatoração QR fornece então infinitas soluções, a solução obtida é a de mínima norma.

- **Exercícios finais:**

  1. Calcular la decomposição SVD da matriz

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  2. Dizer quais das seguintes são verdadeiras:
     - $AA^\dagger A = A$
     - $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$
     - $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$
     - $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$
     - $A^T A = V\Sigma^2 V^T$
     - $AA^T = U\Sigma^2 U^T$
     - As colunas de V são autovetores de $A^T A$.
     - As colunas de U são autovetores de AA^T.

3. Seja A uma imagem de $m \times n$ pixels. Seja B sua aproximação de posto k obtida da SVD. Calcular a memória mínima necessária para armazenar B.
4. (Opcional) Computar as aproximações de posto 1 e 2 da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

5. (Opcional) Seja A uma matriz quadrada cujas colunas são ortogonais, mas não ortonormais. De fato, sejam σ_1, σ_2, ..., σ_n os comprimentos de cada coluna. Calcular os fatores U, Σ e V da decomposição SVD.
6. (Opcional) Sejam $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes ortogonais. Dadas duas matrizes A e B que satisfazem $B = UAV^T$, mostre que os valores singulares de A e B coincidem.