SME0305 - 2016

R. Ausas - G. Buscaglia

Lista geral da disciplina

1. Fazer em Octave/Matlab

   (a) Um programa que cria dois vetores randomicos e calcula o seu produto escalar.

   (b) Um programa que cria duas matrizes randômicas e calcula o seu produto.

   (c) Um programa que mede o tempo necessário para calcular o produto de duas matrizes randômicas de 100×100. Usar os comandos `tic` e `toc`.

   (d) Um programa para determinar se os vetores de $\mathbb{R}^4$ na sequência são linearmente independentes

   $$\mathbf{v}_1 = [0\ 1\ 0\ 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1\ 2\ 3\ 4]^T,$$
   $$\mathbf{v}_3 = [1\ 0\ 1\ 0]^T, \quad \mathbf{v}_4 = [0\ 0\ 1\ 1]^T$$

   (exercício 1.6 do livro de Quarteroni et al.)

   (e) Um programa que, para um valor dado de x, calcule numericamente a probabilidade $P(x)$ de que uma matriz randômica de 3x3 tenha determinante menor (em valor absoluto) que x. Desenhe a função $P(x)$.

2. A conectividade de uma rede é uma matriz em que cada linha corresponde a uma conexão (aresta) e tem duas colunas, uma para cada um dos vértices da conexão.

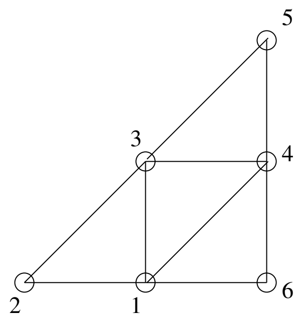
   Considere as seguintes matrizes de conectividade:

```
con1=[2,1;1,6;6,4;4,5;5,3;3,2;1,4;4,3;3,1];

con2=[2,1;1,6;3,4;1,3;6,4;4,5;2,3;3,5;1,4];

con3=[1,2;6,1;4,3;3,1;4,6;4,5;2,3;3,5;1,4];
```

   e a seguinte função:

```
function vec=f(nv,nb,con)
    vec=zeros(1,nv);
    for i=1:nb
        p = con(i,1);
        q = con(i,2);
        vec(p)=vec(p)+1;
        vec(q)=vec(q)+1;
    end
end
```

   (a) Considere a rede da figura e responda qual das matrizes de conectividade (`con1, con2, con3`) corresponde com ela (podem ser várias ou nenhuma).



   (b) Responda se verdadeiro ou falso:

```
> vec=f(6,9,con1)
vec =
4 2 4 4 2 2
```

   (c) Responda se verdadeiro ou falso: Em toda rede, se `nv` é o número de vértices, `nb` o número de arestas, e `con` a conectividade, então
   `> vec=f(nv,nb,con)`
   dará um vetor cuja componente `i` será o número de arestas que tem o vértice `i` como um dos extremos.

   (d) Responda se verdadeiro ou falso: O resultado de `f(6,8,con1)` é o mesmo de `f(6,8,con2)`.

3. Considere a definição de $F(\beta, t, m, M)$.

   (a) Determine quantos números distintos há no conjunto.

   (b) Particularize a resposta do item anterior para o conjunto $C = F(3, 5, -3, 3)$.

   (c) Indique qual o número de C mais próximo de $\sqrt{2}$. Expressar o resultado em base 3 e em base 10. Quanto vale o erro de arredondamento relativo nesse caso?

   (d) Calcule ϵ_M.

   (e) Calcule o maior e o menor número positivo representável no conjunto C, expressados em base 3 e em base 10.

4. Faça uma função em Octave

```
function kang = angulos(a,b,c)
```

   que tome como dados três números reais que são os comprimentos dos três lados de um triângulo T. A função deve retornar os seguintes valores:
   $1 \rightarrow$ se todos os ângulos de T são agudos.
   $2 \rightarrow$ se algum dos ângulos é obtuso.
   $0 \rightarrow$ se não existe triângulos com esses comprimentos de lados.

5. Considere a simulação MC:

```
som = 0;
for i=1:N
 theta=rand(2,1);
 *******
 som = som + X;
end
x=som/N
```

   Quando `*******` é substituido por

```
Y=theta'*theta;
X=Y*Y;
```

   `x` converge a:

   (a) 12/25
   (b) 1
   (c) 16/9
   (d) 28/45
   (e) 26/35
   (f) Nenhuma das anteriores

   Quando `*******` é substituido por

```
Y=theta(1)+theta(2);
if (Y<0.5) X=1;
```

`x` converge a:

(a) 1
(b) 1/4
(c) 2
(d) 4
(e) 1/8
(f) Nenhuma das anteriores

---

6. As condutâncias `C(1:nc)` de uma rede hidráulica tomam tres valores possíveis, `c1`, `c2` e `c3`, aleatoriamente. As probabilidades são 20%, 70% e 10%, respectivamente. O seguinte código gera amostras de `C`:

```
function C = geraC(nc,c1,c2,c3)
for k=1:nc
C(k)=c2;
aux=rand();
if (aux < ********) C(k)=c1; end
if (aux > ||||||||) C(k)=c3; end
end
```

O que deve ser escrito em vez de `*******` e de `||||||||`?

---

7. A função anterior é utilizada na seguinte simulação MC:

```
som = 0;
for i=1:N
 C=geraC(nc,c1,c2,c3);
 P=ResolveRede(nv,conec,C);
 X=1+min(min(sign(P-3),0));
 som=som+X;
end
mu=som/N
```

Então, a média `mu` converge para

(a) o número esperado de nós da rede com pressão superior a 3 bar.
(b) o número esperado de nós da rede com pressão inferior a 3 bar.
(c) a probabilidade de haver algum nó da rede com pressão superior a 3 bar.
(d) a probabilidade de não haver nenhum nó da rede com pressão superior a 3 bar.
(e) duas das anteriores são verdadeiras.
(f) todas as anteriores são falsas.

---

8. Na integração Monte Carlo de uma certa função se sabe que, para conseguir **dois dígitos significativos** confiáveis, são necessárias no mínimo **1500** amostras (ou iterações). Então, para conseguir **quatro dígitos** confiáveis, quantas serão necessárias?

---

9. Responder com verdadeiro ou falso:

(a) Para um sistema de equações $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que admite solução única se verifica que as linhas de A são linearmente dependentes.

(b) Para um sistema de equações $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que admite solução única se verifica que $A\mathbf{x} = 0$ se e só se $\mathbf{x} = 0$.

(c) Se premultiplicar (ou seja, multiplicar a esquerda) uma matriz A por uma matriz de permutação P, então o resultado será uma matriz com as mesmas linhas que A, mas numa ordem diferente.

(d) Uma matriz de permutação, obtida trocando a ordem apenas de duas linhas da matriz identidade, é simétrica.

(e) Conhecida a fatoração LU de A, podemos calcular o determinante dela como $\det(A) = \det(L)$.

(f) Uma vez calculada a fatoração LU de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o determinante dela pode ser calculado fazendo

```
for i=1:n
  det=1;
  det=det*U(i,i);
end
```

(g) O custo computacional de calcular o produto escalar de dois vetores é de ordem $\mathcal{O}(n^2)$.

(h) O custo computacional de calcular o produto de uma matriz por um vetor é de ordem $\mathcal{O}(n^3)$.

(i) O custo computacional de calcular a fatoração LU de uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é proporcional n^3.

(j) O custo computacional de aplicar o método de substituição progressiva (Forward substitution) para resolver um sistema triangular inferior de $n \times n$ é proporcional a n.

(k) Uma vez obtida a fatoração LU de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, para resolver qualquer sistema da forma

$$A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}$$

são necessárias $\mathcal{O}(n)$ operações.

(l) O pivotamento ajuda na precisão reduzindo o erro de arredondamento.

(m) Sabemos que na fatoração LU com pivotamento, são calculadas matrizes P, L e U tais que $P\,A = L\,U$. Ainda, a matriz de permutação P é sempre simétrica.

(n) Sabemos que na fatoração LU com pivotamento, são calculadas matrizes P, L e U tais que $P\,A = L\,U$. Ainda, os elementos da matriz de permutação P são 0 ou 1.

(o) Se uma matriz tem determinante negativo, então ela não pode ser fatorada da forma

$$A \;=\; H\,H^T$$

(p) O custo computacional de calcular a fatoração de Cholesky para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é proporcional a n^3 (i.e., #flops $\sim Cn^3$). Essa constante C é menor que no caso da fatoração LU.

(q) A decomposição de Cholesky pode ser aplicada a qualquer matriz simétrica.

---

10. Seja $D \in \mathbb{R}^{m\times N}$ uma matriz de dados ($m \gg 1$). A quantidade representada numa coluna i qualquer será chamada de d_i (e.g., superfície, preço, etc.). Diga se é verdadeiro ou falso que cada um dos seguintes códigos Octave ajustam a coluna `k` como um polinômio de segundo grau da coluna `j` e calculam o valor do ajuste no

valor d_j =`a`. Os códigos podem ser errados por dar o resultado errado ou por conter erros de programação.

O ajuste desejado é por quadrados mínimos, com o produto escalar usual. Os dados de entrada são `m`, `D`, `j`, `k`, e `a`. O valor do ajuste deve estar na variável de saida `val`.

```
A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];
b=D(:,k);
x=A\b;
val=1+a*x+a^2*x^2;
```

```
A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];
z=[1,a,a^2]';
b=D(:,k);
x=A\b;
val=z'*x;
```

```
A=[D(:,j)-1,D(:,j)+1,...
D(:,j).*D(:,j)];
z=[a-1,a+1,a^2]';
b=D(:,k);
x=A\b;
val=z'*x;
```

11. Se sabe que as colunas 1, 2 e 3 de `D` são ortonormais. Se deseja calcular a distância (euclidiana usual) da coluna `k` ao espaço gerado pelas colunas 1, 2 e 3.

Para isto, se desenvolveu o seguinte código:

```
A=D(:,1:3);
b=D(:,k);
v=A'*b;
p=A*v;
val=norm(******);
```

Que deve ser programado em `******` para que `val` tenha o valor desejado?

12. Indique se Verdadeiro ou Falso, sendo que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \geq n$:

    (a) Para que existam $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ triangular superior tais que
    $$A = QR$$
    é necessário que A seja de posto completo ($\text{rank}(A) = n$).

    (b) É suficiente que A seja de posto completo para que as últimas $m-n$ colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)^{\perp}$.

    (c) É suficiente que A seja de posto completo para que as últimas $m-n$ colunas de Q sejam base de $\text{Nu}(A^T)$.

    (d) Se as colunas de A já são ortonormais, então $Q = A$, mesmo que $\text{rank}(A) = k < n$.

13. Considere o algoritmo geral para resolver o sistema
$$A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}$$

Dados $\mathbf{x}^{(0)}$, TOL, MAX_IT, $k=0$

Enquanto $\|\mathbf{r}^{(k)}\| > TOL$ e $k < MAX\_IT$

(a) Resolver $M\,\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{r}^{(k)}$

(b) Determinar o escalar β_{k+1}

(c) Avançar: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \beta_{k+1}\,\mathbf{d}^{(k+1)}$

(d) Calcular residual: $\mathbf{r}^{(k+1)} = A\,\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}$

(e) Incrementar k

Fim

Responder com verdadeiro (V) ou Falso (F):

(a) O algoritmo converge mais rapidamente quanto mais parecida seja a matriz M do método com a matriz A^{-1}.

(b) O algoritmo converge mais rapidamente quanto mais parecida seja a matriz M do método com a matriz A.

(c) Com a escolha de $M = A$ e $\beta_k = 1\ \forall k$, o algoritmo converge em uma iteração.

(d) Dado um sistema linear e um método iterativo correspondente a uma certa escolha da matriz M e $\beta_k = 1\ \forall k$, a convergência do método só depende de que o raio espectral da matriz $S = \mathbb{I} - A\,M^{-1}$ seja menor do que 1.

(e) Dado um sistema linear e um método iterativo correspondente a uma certa escolha da matriz M e $\beta_k = 1\ \forall k$, a convergência do método depende de que o raio espectral da matriz $S = \mathbb{I} - A\,M^{-1}$ seja menor do que 1 e da escolha para o chute inicial $x^{(0)}$.

(f) Considerando $\beta_k = 1\ \forall k$, no passo $(k+1)$ do método podemos escrever $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, sendo $B = \mathbb{I} - M^{-1}A$ e $\mathbf{g} = M^{-1}\,\mathbf{b}$. A condição para a convergência é que o raio espectral de B seja menor do que 1.

(g) O método de Jacobi converge para qualquer matriz simétrica que possui pelo menos um autovalor positivo.

(h) Para o sistema
$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$
o método de Jacobi pode-se escrever como
$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\,x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\,x_1^{(k+1)} - a_{23}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\,x_1^{(k+1)} - a_{32}\,x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

(i) Partindo do mesmo ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o método de Jacobi vai calcular o mesmo segundo ponto $\mathbf{x}^{(1)}$ para os dois sistemas seguintes,
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$
que são obviamente equivalentes.

(j) O método de Jacobi é um caso particular do algoritmo geral, com M igual à parte diagonal de A e $\beta_k = 1\ \forall k$.

(k) O método de Jacobi converge para matrizes simétricas e definidas positivas de 2×2.

(l) Para as matrizes estrictamente diagonais dominantes por linha, o método de Gauss-Seidel nunca converge.

---

14. Considerar o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ \alpha\, x_1 + 3\, x_2 = 3 + \alpha \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, que será resolvido pelo método iterativo geral com M sendo a diagonal da matriz do sistema e $\beta_k = 1\ \forall k$. O método é convergente se o só se:

a. $\alpha < 10$

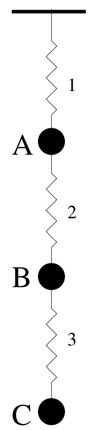
b. $|\alpha| > 10$

c. $\alpha < -6$

d. $|\alpha| < 6$

e. $\alpha = 6.1$

f. Nenhum dos anteriores.



15. No diagrama da Figura se observam três massas (m_A, m_B, m_C) e três molas (1, 2, 3) de constantes e comprimentos relaxados k_i, ℓ_i, $i = 1, 2, 3$.

Lembrete 1: A energia elástica de uma mola é $k\ \Delta\ell^2/2$, onde $\Delta\ell$ é a variação de comprimento respeito do estado relaxado. A tensão na mola é $k\ \Delta\ell$. A energia gravitacional de uma massa m, é $m\, g\, (x_0 - x)$, sendo x a coordenada vertical (positiva para baixo), x_0 uma posição de referência arbitrária, e g a aceleração da gravidade.
Lembrete 2: Definindo

$$F(x) = (1/2) x^T A x - x^T b$$

e $r(x) = Ax - b$, de todos os pontos da forma $y = x^{(k)} + \beta_k\, d^{(k)}$, qualquer que seja a escolha de $d^{(k)}$, o valor de β_k que minimiza $F(y)$ é

$$\beta_k = -\frac{{d^{(k)}}^T\, r(x^{(k)})}{{d^{(k)}}^T\, A\, d^{(k)}}\ .$$

Seja $u = (u_A, u_B, u_C)^T$ o vetor de deslocamentos (verticais) das massas respeito da configuração de referência (todas as molas com comprimento relaxado). Determinar uma matriz A tal que a energia elástica do sistema se escreva

$$E_{\text{elas}} = \frac{1}{2}\, u^T\, A\, u\ .$$

Determinar um vetor $b \in \mathbb{R}^3$ tal que a energia gravitacional se escreva

$$E_{\text{grav}} = \ -\ u^T\, b\ .$$

Considerando $m_A = 3$, $m_B = 2$, $m_C = 1$, $g = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 10$, calcule o gradiente (como vetor coluna) da energia total

$$E = E_{\text{elas}} + E_{\text{grav}}$$

na configuração $\bar{u} = (1, 1, 0)$ (massas A e B deslocadas uma unidade para baixo, massa C na posição de referência).

---

16. Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores distintos, λ_1, $\ldots$, λ_n, satisfazendo $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ sempre que $i \neq j$. Suponha os autovalores ordenados de maneira que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Os correspondentes autovetores são $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, etc., são normalizados na norma euclidiana ($\|z\| = \sqrt{z^T z}$). Dizer se verdadeiro ou falso:

(a) A matriz A é diagonalizável.

(b) A matriz $A - \lambda_1\, I$ é diagonalizável.

(c) O método das potências aplicado à matriz A^{-1} permite obter $1/\lambda_n$.

(d) O método das potências *inversas* aplicado à matriz A permite obter λ_n.

(e) O método das potências aplicado à matriz A convergirá mais rápido quanto menor seja o cociente $|\lambda_2/\lambda_1|$

(f) O método das potências, com $B = A$, convergirá mais rapidamente que com $B = A^2$.

(g) A matriz $A - \lambda_1\, I$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, $\ldots$, $\lambda_n - \lambda_1$.

---

17. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} + 2\ \underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\lambda^{(k)}$ convergirá para que valor?

---

18. Seja A uma matriz $n \times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $B = (A - 0.2\ I)^{-1}$, a sequência dos $\lambda^{(k)}$ converge para 5. Então é possível concluir que:

(a) 5 é autovalor de A.

(b) $1/5$ é autovalor de A.

(c) $2/5$ é autovalor de A.

(d) 0 é autovalor de A.

(e) A não tem autovalores positivos menores que $1/5$.

(f) A não tem autovalores positivos menores que $2/5$.

(g) A não tem autovalores positivos menores que $4/5$.

---

19. O logaritmo de uma matriz A de $n \times n$ simétrica e definida positiva se define da seguinte maneira: Se

$$A = S\, \Lambda\, S^{-1}$$

com $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Então

$$\log(A) = S \log(\Lambda) S^{-1} ,$$

onde $\log(\Lambda) = \text{diag}(\log(\lambda_1), \ldots, \log(\lambda_n))$.
Os comandos de Octave relacionados são `eig` e `log`.

```
-- Built-in Function: [V, LAMBDA] = eig (A)
Compute the eigenvalues and eigenvectors of a
     matrix.
Eigenvectors: Columns of V
Eigenvalues: Diagonal elements of LAMBDA

-- Mapping Function: log (X)
Compute the natural logarithm, 'ln (X)', for
     each element of X.
```

Indicar quais dos seguintes programas Octave calculam $B = \log(A)$ (podem ser zero, um ou vários):

(a) `B = log(A)`

(b)
```
[S D]=eig(A);
B=log(S)*log(D);
```

(c)
```
[S D]=eig(A);
lD=log(D);
B=S*lD*inv(S)
```

(d)
```
[S D]=eig(A);
B=inv(S)*log(D)*S
```

(e)
```
[S D]=eig(A);
lam=diag(D);
eD=diag(log(lam));
B=S*eD*S'
```

(f)
```
[S D]=eig(A);
lam=diag(D);
eD=diag(log(lam));
B=S*eD*inv(S)
```

---

20. O quociente de Rayleigh $r(v)$, sendo v vetor (coluna) de $\mathbb{R}^n$ e matrizes K simétrica e M simétrica definida positiva, se define como

$$r(v) = \frac{v^T K v}{v^T M v} .$$

Mantendo v, K e M fixos, pode se provar que $r(v)$ minimiza a função

$$J(\mu) = (K v - \mu M v)^T G (K v - \mu M v)$$

para uma certa matriz G. Quem é essa matriz G?

(a) $G = M^{-1}$
(b) $G = M$
(c) $G = K$
(d) $G = KM$
(e) $G = K^{-1}$
(f) $G = I$ (identidade)
(g) $G = M^{-1}K$
(h) $G = K^{-1}M$
(i) Nenhuma das anteriores

Comentário: Notar que

$$J(\mu) = \|Kv - \mu Mv\|_G^2$$

onde a norma $\|\cdot\|_G$ vem do produto escalar $\langle x, y\rangle = x^T Gy$. Nessa norma, $r(v)$ é o valor de μ que faz μMv ser o mais próximo possível de Kv.

---

21. Sejam as matrizes K simétrica e M simétrica e definida positiva. Sejam v^i e λ_i os autovalores e autovetores generalizados satisfazendo

$$K v^i = \lambda_i M v^i .$$

Os autovetores estão normalizados para satisfazer

$$(v^j)^T M v^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Com eles formamos as seguintes matrizes:

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
- $V =$ matriz cujas colunas são os autovetores $\{v^i\}$.

Essas matrizes permitem estabelecer a decomposição generalizada seguinte (notar a semelhança com a decomposição usual $A = SDS^{-1}$):

$$K = MV\Lambda V^{-1} \tag{1}$$

Indicar as seguintes afirmações são Verdadeiras ou Falsas:

(a) $K V = M V \Lambda$.
(b) $K V = \Lambda M V$.
(c) $K = \Lambda M$.
(d) $V^T V = I$.
(e) $V^T MV = I$.
(f) $V^T MV = \Lambda$.
(g) $V^T KV = \Lambda$.
(h) $V^T KV = I$.
(i) $M^{-1}K = V \Lambda V^{-1}$.
(j) $\det(K - \lambda_i M) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.
(k) $\det(M^{-1}K - \lambda_i I) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.
(l) $\det(V) = 1$.

---

22. Dizer se verdadeiro ou falso:

(a) As linhas de V são vetores singulares esquerda de A.
(b) As colunas de V são vetores singulares direita de A.
(c) As colunas de U são vetores singulares esquerda de A.
(d) As colunas de U são vetores singulares direita de A.
(e) As linhas de U são vetores singulares esquerda de A.
(f) As linhas de U são vetores singulares direita de A.

(g) As colunas de V são vetores singulares esquerda de A.

(h) As linhas de V são vetores singulares direita de A.

---

23. Denotemos por u_i a coluna número i de U, e por v_i a coluna número i de V. Dizer se verdadeiro ou falso:

    (a) $u_i^T v_j = 0$ if $i \neq j$.

    (b) $v_i^T v_j = 0$ if $i \neq j$.

    (c) $u_i^T u_j = 0$ if $i \neq j$.

    (d) $u_i^T A v_j = 0$ if $i \neq j$.

    (e) $v_i^T A u_j = 0$ if $i \neq j$.

    (f) $v_i^T A^T u_j = 0$ if $i \neq j$.

    (g) $u_i^T A^T v_j = 0$ if $i \neq j$.

---

24. Denotamos por $A^\dagger$ a pseudoinversa de A, cuja décomposição SVD é $A = U\Sigma V^T$. Dizer se verdadeiro ou falso:

    (a) $AA^\dagger A = A$

    (b) $A^\dagger A = AA^\dagger$

    (c) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

    (d) $A^\dagger AA^\dagger = A$

    (e) $(AA^\dagger)^T = AA^\dagger$

    (f) $A^T A^\dagger = A^\dagger A$

    (g) $(A^\dagger A)^T = A^\dagger A$

    (h) $A^\dagger A^T = (A^\dagger)^T A$

    (i) $A^T A = V\Sigma^2 V^T$

    (j) $A^T A = U\Sigma^2 U^T$

    (k) $AA^T = U\Sigma^2 U^T$

    (l) $AA^T = U\Sigma^2 U^T$

Boa prática, boa prova, e **boas férias !!**