SME0305 - Lista 6 - Civil/2016

Sistemas sobredeterminados

1. Seja $D \in \mathbb{R}^{m\times N}$ uma matriz de dados. A quantidade representada numa coluna i qualquer será chamada de d_i (e.g., superfície, preço, etc.).

   (a) Se deseja ajustar a coluna k como uma função quadrática (polinômio de grau 2) da coluna j,

   $$d_k \simeq \text{constante}_1 + \text{constante}_2\, d_j + \text{constante}_3\, d_j^2 \ .$$

   O seguinte código Octave produz o sistema superdeterminado $A\,x = b$ correspondente ao ajuste desejado? Porquê?

   ```
   A=[ones(m,1),D(:,j),D(:,j).*D(:,j)];
   b=D(:,k);
   ```

   (b) Se deseja ajustar a coluna k como uma combinação linear da coluna j e da exponencial dela,

   $$d_k \simeq \text{constante}_1 d_j + \text{constante}_2\, \exp(d_j) \ .$$

   O seguinte código Octave produz o sistema superdeterminado $A\,x = b$ correspondente ao ajuste desejado? Porquê?

   ```
   A = [ D(:,j), exp(D(:,j)) ];
   b = D(:,k);
   ```

   (c) Cada coluna de D tem uma média tomada sobre todas as linhas (ocorrências, medições), que pode ser calculada como uma matriz linha $M \in \mathbb{R}^{1\times n}$,

   ```
   M = mean(D)
   ```

   Então a matriz S de desvios respeito da média (i.e., S_{ij} é a diferença entre o dado d_i obtido na medição j e a média de todos os dados d_i medidos) é dada pelo seguinte código? Porquê?

   ```
   S = D - ones(m,1)*mean(D)
   ```

   (d) Se deseja ajustar os desvios respeito da média do dado da coluna k com uma função senoidal do dado da coluna j,

   $$d_k - \overline{d_k} = \text{amplitude} \times \sin\left(d_j - \overline{d_j} - \text{fase}\right) \ .$$

   Escrever um código Octave que construa um sistema linear superdeterminado cuja solução permita determinar as incógnitas de amplitude e fase.

   (e) Se deseja ajustar a coluna k como uma combinação linear das colunas 1 a j ($j < k$),

   $$d_k \simeq \text{constante}_1\, d_1 + \ldots + \text{constante}_j\, d_j \ .$$

   O seguinte código Octave produz o sistema superdeterminado $A\,x = b$ correspondente ao ajuste desejado? Porquê?

   ```
   A = D(:,1:j);
   b = D(:,k);
   ```

2. Seja $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz de dados como no exercício anterior. Se suspeita que as colunas de D não são linearmente dependentes, isto é, que existem relações do tipo

   $$c_1\, d_1 \,+\, c_2\, d_2 \,+ \ldots +\, c_n\, d_n = 0 \ .$$

   Aproveitando a função de Octave `null`, escreva um código que descubra essas relações.

   ```
   > help null

   -- Function File: null (A)
         Return an orthonormal basis of the
         null space of A.
   ```

   O "null space" é o núcleo de A, i.e., o conjunto $\{v \in \mathbb{R}^M \mid A\,v = 0\}$, onde M é o número de colunas de A.

3. Dados vetores não nulos $v \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^m$, arbitrários, escrever um código Octave que construa uma matriz A tal que $w = A\,v$. Lembre que os vetores são representados por matrizes coluna. Comparar com

   ```
   A = w*v'/(v'*v)
   ```

   Essa matriz é única? Porquê?

4. Seja o sistema sobredeterminado $A\,x = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$, é de rango completo ($= n$). Sabendo que a função `rank` de Octave calcula o rango de uma matriz, escreva um código que calcule uma variável `k_existe` com valor 1 se existe solução exata do sistema, e valor 0 se não. Compare com

   ```
   Ab=[A,b];
   rAb=rank(Ab);
   if (rAb == n)
    k_existe = 1;
   else
    k_existe = 0;
   end
   ```

5. Refaça o exercício anterior, agora para uma matriz A que não necessariamente é de rango completo.

6. Seja o sistema sobredeterminado $A\,x = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Escreva um código Octave que calcule a solução de mínimos quadrados x^* (`xstar`) resolvendo as equações normais. Os pesos dados a cada equação são w_1, w_2, etc., armazenados na matriz coluna `w`. O código também deve calcular um indicador `k_unica` valendo 1 se x^* é única, e 0 se não. Compare com

   ```
   G=w*w';
   M=A'*G*A;
   c=A'*G*b;
   xstar = M\c;
   rM=rank(M);
   if (rM == n)
    k_unica = 1;
   else
    k_unica = 0;
   end
   ```

7. Com a mesma notação do exercício anterior, seja

   $$\Phi(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \|Ax - b\|_G^2 \ .$$

   Calcular $\partial\Phi/\partial x_i$ e verificar que

   $$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x^*) = 0 \ \ \forall i \quad \Leftrightarrow \quad A^T G A x^* = A^T G b$$

Boa prática!!