SME0305 - Lista 7 - Civil/2016

Fatoração QR

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $m > n$ (!!), responda verdadeiro ou falso:

1. Sempre existem $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ triangular superior tais que
$$A = QR\ .$$
2. Para que existam $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal e $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ triangular superior tais que
$$A = QR$$
é necessário que A seja de posto completo ($\text{rank}(A) = n$).
3. É necessário que A seja de posto completo para que as primeiras n colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)$.
4. É necessário que A seja de posto completo para que as últimas $m-n$ colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)^\perp$.
5. É suficiente que A seja de posto completo para que as últimas $m-n$ colunas de Q sejam base de $\text{Im}(A)^\perp$.
6. É suficiente que A seja de posto completo para que as últimas $m-n$ colunas de Q sejam base de $\text{Nu}(A^T)$.
7. As últimas $m-n$ colunas de Q pertencem a $\text{Nu}(A^T)$, sempre.
8. Se $\text{rank}(A) = k < n$, então as k primeiras colunas de Q são base de $\text{Im}(A)$.
9. Se as colunas de A já são ortonormais, então $Q = A$, mesmo que $\text{rank}(A) = k < n$.
10. Se as colunas de A já são ortonormais e $\text{rank}(A) = n$, então $Q = A$.
11. Se A é de posto completo e $b \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, a projeção de b sobre $\text{Im}(A)$ é dada por
```
pb=Q(:,1:n)*Q(:,1:n)'*b
```
12. Sempre existem $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (de colunas ortonormais) e $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior tais que
$$A = Q_1 R_1\ .$$
13. É necessário que A seja de posto completo para que as colunas de Q_1 sejam base de $\text{Im}(A)$.
14. Se A é de posto completo e $b \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, a projeção de b sobre $\text{Im}(A)$ é dada por
```
pb=Q1*Q1'*b
```
15. Se $\text{rank}(A) = k < n$, então as k primeiras colunas de Q_1 são base de $\text{Im}(A)$.
16. Sempre existem Q (de $m\times m$) ortogonal, R (de $m\times n$) triangular superior com diagonal decrescente ($r_{ii} \geq r_{jj} \geq 0$, $\forall i < j$) e P (permutação) tais que
$$AP = QR\ .$$
17. Se QR é a fatoração ordenada e $\text{rank}(A) = k < n$, então as primeiras k colunas de Q são base ortonormal de $\text{Im}(AP)$, mas não de $\text{Im}(A)$.
18. Se QR é a fatoração ordenada e $\text{rank}(A) = k < n$, então as primeiras k colunas de Q são base ortonormal de $\text{Im}(A)$, mas não de $\text{Im}(AP)$.
19. Se QR é a fatoração ordenada e $\text{rank}(A) = k < n$, então as últimas $m-k$ colunas de Q são base ortonormal de $\text{Im}(A)^\perp$.
20. Se `b` é um vetor (coluna) de dimensão m, e $[QRP] = qr(A)$, então o vetor mais próximo a `b` na imagem de A (de posto $k < n$) é dado por
```
pb = Q(:,1:k)*Q(:,1:k)'*b
```
21. Se deseja ajustar a coluna r de A com combinações lineares das primeiras 3 colunas. O código em Octave para fazer isto é
```
M=A(:,1:3);b=A(:,r);
x=M\b;
```
e o ajuste correspondente é
$$c_r(A) \simeq x_1\, c_1(A) + x_2\, c_2(A) + x_3\, c_3(A)$$

Boa prática!!