SME0305 - 2016

Roberto Ausas/Gustavo Buscaglia

Lista 11 - Método das potências e variantes

Material complementar de estudo: Slides do prof. Afonso Paiva.

1. Para diferentes valores de `n`, gerar matrizes `M` em Octave usando as seguintes intruções:

   - `A = rand(n,n);`
   - `B = A'*A;`
   - `[Q, R] = qr(B);`
   - `d = [1:n];`
   - `D = diag(d);`
   - `M = Q'*D*Q;`

   e usando a instrucção

   ```
   [V, LAMBDA] = eig(M)
   ```

   Calcular os autovetores e autovalores. A funcção `eig` devolve uma matriz `V` cujas colunas são os autovetores e uma matriz `LAMBDA` diagonal com os autovalores.

   (a) Verificar que os autovetores são ortogonais.

   (b) Verificar que os autovalores são exatamente os números `1,2,...,n`.

   (c) Medir o tempo de cálculo como função do tamanho da matriz.

   (d) Mudar na mão o vetor `d` para que apareçam entradas repetidas. Calcular novamente os autovalores e autovetores e verificar que os autovetores asociados ao autovalor repetido não são ortoganais entre eles.

   (e) No item anterior, aplicar o método de Gram-Schmidt e ortoganalizar esses autovetores, para redefinir a matriz Q.

2. Como são os autovalores de uma matriz triangular?

3. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ que tem n autovalores distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, satisfazendo $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ sempre que $i \neq j$. Suponha os autovalores ordenados de maneira que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$. Os correspondentes autovetores são $\underline{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(2)}$, etc., são normalizados na norma euclidiana ($\|\underline{z}\| = \sqrt{\underline{z}^T \underline{z}}$). Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) A matriz $\underline{\underline{A}}$ é diagonalizável.

   (b) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ é diagonalizável.

   (c) O método das potências aplicado à matriz A^{-1} permite obter $1/\lambda_n$.

   (d) O método das potências *inversas* aplicado à matriz A permite obter λ_n.

   (e) O método das potências aplicado à matriz A convergirá mais rápido quanto menor seja o cociente $|\lambda_2/\lambda_1|$

   (f) O método das potências, com $B = A$, convergirá mais rapidamente que com $B = A^2$.

   (g) A matriz $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{I}}$ tem autovalores 0, $\lambda_2 - \lambda_1$, $\lambda_3 - \lambda_1$, …, $\lambda_n - \lambda_1$.

4. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - 3\,\underline{\underline{I}}$, a sequência dos $\lambda^{(k)}$ convergirá para:

   (a) 1

   (b) 3

   (c) -1

   (d) -2

   (e) $1/3$

   (f) $-1/2$

   (g) 0

   (h) Não convergirá

5. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são 1, 2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} + 2\,\underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\lambda^{(k)}$ convergirá para:

   (a) 1

   (b) $1/2$

   (c) $-1/2$

   (d) $1/4$

   (e) $1/3$

   (f) $1/6$

   (g) $-1/5$

   (h) Não convergirá

6. Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} - 0.2\,\underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\lambda^{(k)}$ converge para 5. Então é possível concluir que:

   (a) 5 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.

   (b) $1/5$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.

   (c) $2/5$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.

   (d) 0 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$.

   (e) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $1/5$.

   (f) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $2/5$.

   (g) $\underline{\underline{A}}$ não tem autovalores positivos menores que $4/5$.

7. Programar numa mesma função de Octave o método das potências, o método das potências inversas e das potências inversas com deslocamento. Dependendo da escolha do usuario, a função aplicará um ou outro método para calcular o autovalor de maior módulo, o de menor módulo ou autovalor mais próximo de um certo valor q (também fornecido pelo usuario).