SME0305 - Lista 4 - Civil/2016

Integração Monte Carlo

Quando necessária, utilizamos a função

`funcion P = ResolveRede(nv,conec,C)`

que retorna o vetor `P(nv)` de pressões em uma rede hidráulica conhecida de `nv` nós, `nc` canos, matriz de conectividade `conec(nc,2)` e vetor de compliâncias `C(nc)`.

---

1. Considere a simulação MC:

```
som = 0;
for i=1:N
 theta=rand(2,1);
 *******
 som = som + X;
end
x=som/N
```

Demonstre que:

   (a) Quando `*******` é substituido por

   `X=theta'*theta;`

   x converge a 2/3.

   (b) Quando `*******` é substituido por

   `X=theta(1)+theta(2);`

   x converge a 1.

   (c) Quando `*******` é substituido por

```
Y=theta(1)+2*theta(2); X=0;
if (Y > 2) X=1; end
```

   x converge a 1/4.

2. Considere a simulação MC:

```
som = 0;
for i=1:N
 aux=rand();
 if (aux<0.5) theta = 2*aux;
 else theta=4*aux-1;
 end
 X = theta^2;
 som = som + X;
end
x=som/N
```

Demonstre que $\hat{x} \to 7/3$.

3. Seja Ω a semi-circunferência de raio 1,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

Se deseja calcular μ, o valor médio, em Ω, da função $f(x, y) = \sin^2(x - y)$, i.e.,

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_C f(x, y)\ ds\ .$$

Indique quais dos seguintes códigos calcula numericamente μ por MC, explicando porque:

```
a) som = 0;
  for i=1:N
   aux=rand()*pi;
   x=cos(aux); y=sin(aux);
   X=sin(x-y)^2;
   som = som + X;
  end
  mu=som/N
```

```
b) som = 0;
  for i=1:N
   aux=rand();
   x=cos(aux); y=sin(aux);
   X=sin(x-y)^2;
   som = som + X;
  end
  mu=(1/pi)*som/N
```

```
c) som = 0;
  for i=1:N
   aux=2*rand()-1;
   x=aux; y=sqrt(1-x^2);
   X=sin(x-y)^2;
   som = som + X;
  end
  mu=som/N
```

```
d) som = 0;
  for i=1:N
   xx=2*rand()-1;yy=2*rand()-1;
   R=sqrt(xx^2+yy^2);
   x=xx/R; y=yy/R;
   X=sin(x-y)^2;
   som = som + X;
  end
  mu=som/N
```

```
e) som = 0;
  total = 0;
  for i=1:N
   xx=2*rand()-1;yy=2*rand()-1;
   R=sqrt(xx^2+yy^2);
   if (R < 1)
    x=xx/R; y=yy/R;
    X=sin(x-y)^2;
    som = som + X; total=total+1;
   end
  end
  mu=som/total
```

4. Quando o conjunto de dados possíveis Ω é contínuo, por exemplo um aberto de $\mathbb{R}^n$, as somatórias se transformam em integrais. O valor esperado, assumindo distribuição uniforme de probabilidade, é

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\operatorname{vol}\Omega} \int_\Omega \mathbf{X}(\theta)\, d\theta$$

onde $d\theta = d\theta_1 \ldots \theta_n$.

Provar que, se $\mathbf{X}$ é uma função que só vale 0 ou 1 e $x = \mathbb{E}(\mathbf{X})$, então

$$\sigma^2(\mathbf{X}) = \mathbb{E}((\mathbf{X} - x)^2) = \mathbb{E}(\mathbf{X}^2) - x^2 = x(1 - x)\ .$$

5. Com base no exercício anterior e a equação vista em aula,

$$\sigma^2(\hat{x}_N - x) = \frac{\sigma^2(\mathbf{X})}{N} \ ,$$

calcule o número N de realizações do método Monte Carlo para calcular o valor de $\pi/4$ (Exemplo 1) com 5 algarismos significativos corretos.

6. As condutâncias `C(1:nc)` de uma rede hidráulica tomam valores aleatórios uniformemente distribuidos entre os valores `clow` e `chigh`. O seguinte código gera amostras de `C`:

```
function C = geraC(nc,clow,chigh)
aux=rand(nc,1);
C = clow + ____________________________ *aux;
end
```

O que deve ser escrito no espaço em branco?

7. A função anterior é utilizada na seguinte simulação MC:

```
som = 0;
for i=1:N
 C=geraC(nc,clow,chigh);
 P=ResolveRede(nv,conec,C);
 X=sum(max(sign(P-3),0));
 som=som+X;
end
mu=som/total
```

Então, a média `mu` converge para

(a) o número esperado de nós da rede com pressão superior a 3 bar.

(b) o número esperado de nós da rede com pressão inferior a 3 bar.

(c) a probabilidade de não haver nenhum nó da rede com pressão superior a 3 bar.

(d) a probabilidade de não haver nenhum nó da rede com pressão inferior a 3 bar.

(e) a probabilidade de não haver nenhum nó da rede com pressão superior a 3 bar.

8. Responda os mesmos items do exercício anterior quando a função `sum` do código é substituida pela função `max`.

9. Que calcularia o mesmo código acima se a função `max` fosse substituida pela função `min`?

10. Como deveria ser mudada a função `geraC` se a condutividade dos canos pudesse tomar apenas 3 valores, `clow`, `cmed` e `chigh`, com probabilidades respectivas de 20%, 50% e 30%?

11. Finalizemos com uma situação bastante típica em engenharia: No problema de obstrução de canos visto nas slides, suponhamos que se começou com a rede sem nenhuma obstrução e que se colocou um filtro na entrada de água para reduzir a probabilidade de obstrução de cada cano fino para $p = 0.05$.

A simulação MC mostrada no slide 23 estimou que a probabilidade da rede falhar no primeiro ano é de 0.7%, e felizmente **a rede não falhou no primeiro ano**. Nenhum cliente ficou sem água.

Uma inspecção feita no mês 12 de funcionamento detectou que, mesmo que não chegasse a dar falha, alguns canos estavam de fato já obstruidos.

Você é chamado como consultor. A empresa lhe fornece todos os dados da rede, mais um vetor `obst(1:nc)` que para cada cano tem o valor 1 se está obstruido e 0 se não.

A empresa deseja saber qual é a probabilidade de a rede continuar sem falhar por mais um ano, sem ser realizada a manutenção anual (limpeza de canos) originalmente prevista.

Como responderia essa pergunta?

Boa prática!!