# SME0305 - 2016

**Roberto Ausas/Gustavo Buscaglia**

---

**Lista 8 - Iterações na engenharia**

1. Ler o capitulo 5 do livro de Quarteroni, paginas 168 até 173.

2. Demostrar a equivalência entre normas

$$\| \mathbf{x} \|_\infty \leq \| \mathbf{x} \|_2 \leq \sqrt{n} \ \| \mathbf{x} \|_\infty,$$

$$\| \mathbf{x} \|_\infty \leq \| \mathbf{x} \|_1 \leq n \ \| \mathbf{x} \|_\infty,$$

$$\| \mathbf{x} \|_2 \leq \| \mathbf{x} \|_1 \leq \sqrt{n} \ \| \mathbf{x} \|_2,$$

3. A partir de um "chute" inicial, implementar em Octave um algoritmo iterativo baseado na fórmula de iteração

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

para achar o zero da função $f(x) = \cosh(x) + \cos(x) - 3$. Considerar como criterios de terminação do algoritmo os seguintes:

- Norma do residuo absoluto da equação;
- Norma do residuo relativo à primeira iteração;
- Norma da diferença entre dois iterandos consecutivos;
- Norma da diferença entre dois iterandos consecutivos relativa à primeira iteração;

4. Seja $A$ uma matriz simétrica. Implementar em Octave um processo iterativo para diagonalizar-la baseado na fatoração QR, em que, em cada passo se faz:

   i. Achar $Q^{(k)}, R^{(k)}$ tal que $A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$
   ii. Calcular $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)}$

Acompanhar os resultados de várias iterações do método e definir um criterio de terminação do algoritmo apropriado.

5. Considerar um método iterativo em que

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\ \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$$

com $B$ uma matriz de iteração fixa e $\mathbf{g}$ um vetor fixo, que permite achar $\mathbf{x}^*$ que resolve $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0$, i.e.,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$$

Pode-se ver que

$$\mathbf{x}^* = B\ \mathbf{x}^* + \mathbf{g}$$

Provar que

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* = B\ \left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right)$$

e portanto

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* = B^{k+1}\ \left(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^*\right)$$

Também provar que:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = B\ \left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right)$$

e similarmente

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = B^k\ \left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right)$$

Que propriedade tem que ter a matriz $B$ para esse algoritmo ser convergente?

6. Prove que, no algoritmo geral estudado,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^* = B\ \left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right)$$

em que

$$B \ = \ \mathbb{I} - \beta_{k+1}\, M^{-1}\, A$$

Verificar que quando $M = A$ e $\beta_{k+1} = 1$ o método converge em uma iteração.

7. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular o raio espectral de $S = \mathbb{I} - A\, D^{-1}$, em que $D$ é a matriz com a diagonal de $A$. Comparar o resultado com Octave fazendo: `norm(S,2)`. Pesquisar o uso da função norm de Octave fazendo: `help norm`

Lembrete: Algoritmo geral para resolver o sistema

$$A\, \mathbf{x}^* \ = \ \mathbf{b} \qquad (*)$$

Os métodos que consideramos consistem de

- Uma matriz $M$ que precisa ser escolhida em cada caso particular.
- Para escolher os números $\beta_1$, $\beta_2$, etc., existem várias possibilidades. No caso do método de Jacobi e Gauss-Seidel, eles são sempre iguais a 1. No caso de outros métodos tais como o método dos gradientes eles são calculados em cada passo.

Esses ingredientes, junto com um "chute" ou condição inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e uma *tolerância* TOL, são combinados no seguinte algoritmo geral:

Dados $\mathbf{x}^{(0)}$, $TOL$, $MAX\_IT$, $k = 0$

Enquanto $\|\mathbf{r}^{(k)}\| > TOL$ e $k < MAX\_IT$

(a) Resolver $M\, \mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{r}^{(k)}$

(b) Determinar o escalar $\beta_{k+1}$

(c) Avançar: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \beta_{k+1}\, \mathbf{d}^{(k+1)}$

(d) Calcular residual: $\mathbf{r}^{(k+1)} = A\, \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}$

(e) Incrementar $k$

Fim

---

8. O **método de Jacobi** está definido por $M = \text{diag}(A)$ e $\beta_k = 1$, $\forall k$. Chamando de $D_A$ à diagonal de $A$, e chamando de $L_A$ e $R_A$ as partes triangulares inferior e superior de $A$ tais que

$$A = L_A + D_A + R_A$$

Verificar que o método de Jacobi pode ser sintetizado como

$$D_A\,\mathbf{x}^{(k+1)} = -L_A\,\mathbf{x}^{(k)} - R_A\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

9. Confira que o método de Jacobi para o sistema

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

se traduz no método "intuitivo"

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\,x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\,x_1^{(k)} - a_{23}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\,x_1^{(k)} - a_{32}\,x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

no qual "da primeira equação é obtida a primeira incógnita deixando as outras fixas nos valores da iteração anterior, e analogamente para a segunda e a terceira".

10. Confira se a seguinte programação em Matlab/Octave implementa uma iteração do método de Jacobi.

```
for i=1:n
 xnew(i)=b(i);
 for j=1:n
   if (j != i)
     xnew(i)=xnew(i)-A(i,j)*xold(j);
   end
 end
 xnew(i)=xnew(i)/A(i,i);
end
```

11. Considerar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Sob quais condições converge o método de Jacobi? e o método de Gauss-Seidel?

12. Mostrar que o método de Jacobi converge para matrizes simétricas e definidas positivas de $2 \times 2$.

13. Verificar que o método de Gauss-Seidel é um caso particular do algoritmo geral, com $M = D_A + L_A$ e $\beta_k = 1$, $\forall\, k$.

14. Aplicar na mão 3 iterações do método de Jacobi e do método de Gauss-Seidel para resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

15. Programar em Octave o método iterativo geral considerando como opções (dependendo da escolha para a matriz $M$):
    - Método direto
    - Método de Jacobi
    - Método de Gauss-Seidel

16. Quantas operações de ponto flutuante são realizadas por cada iteração dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel?.