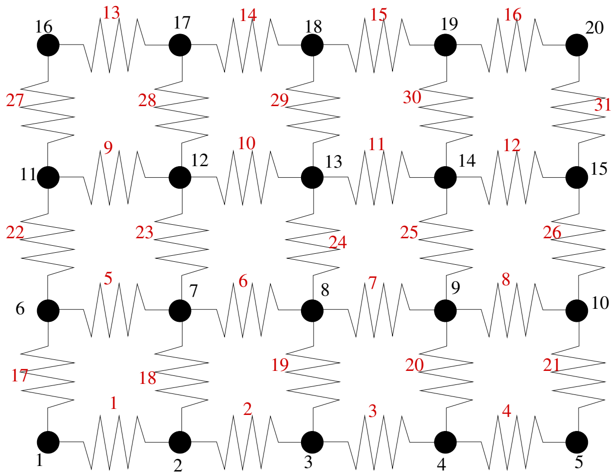
Algebra linear e circuitos elétricos

Gustavo Carlos Buscaglia



A representação de um circuito

A representação de um circuito de resistências arbitrário no computador é composta de `nv` (número de vértices o nós), `nc` (número de resistências ou conexões), `con(1:nc,2)` (conectividade do circuito) e `R(1:nc)` (vetor contendo a resistência de cada conexão).

Para o circuito da figura, por exemplo,

```
nv = 20, nc = 31,
con = [ 1 2 ; 2 3 ; 3 4 ; 4 5 ; 6 7 ; etc ],
```

sendo o vetor `R` igual a $(R_1, R_2, \ldots, R_{20})$, dependendo do valor de cada resistência.

O comportamento do circuito

Consideremos as ações sobre o circuito correspondentes a colocar cada nó i a uma fonte de tensão de potencial V_i, medidos desde um valor zero de referência (terra).

A resposta do circuito será extrair (ou injetar se negativa) uma corrente I_i da fonte conectada ao nó i.

$$\underline{I} = \underline{F}(\underline{V})$$

onde, por exemplo,

```
I(10)=(V(10)-V(5))/R(21)+(V(10)-V(9))/R(8)
       +(V(10)-V(15))/R(26)
```

Chamamos essa função de **desbalanço de correntes**.

Essa função é linear!

$$\underline{F}(\alpha\,\underline{V} + \beta\,\underline{W}) = \alpha\,\underline{F}(\underline{V}) + \beta\,F(\underline{W})$$

para todo $\underline{V}, \underline{W} \in \mathbb{R}^{nv}$, e todo α, $\beta \in \mathbb{R}$.

A matriz do circuito

Teorema: Cada função linear $\underline{F}$ de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é representável de maneira única como uma matriz $\underline{\underline{A}}$, sendo

$$\underline{F}(\underline{V}) \;=\; \underline{\underline{A}}\,\underline{V} \qquad \forall\,\underline{V} \in \mathbb{R}^m$$

No caso de nosso circuito, vemos que

```
A(10,5) = - 1 / R(21)
A(10,9) = - 1 / R(8)
A(10,10) = 1 / R(21) + 1 / R(8) + 1 / R(26)
A(10,15) = - 1 / R(26)
```

Uma função foi desenvolvida que calcula a matriz do desbalanço de correntes.

```
function a = matVtoI(nv,nc,con,R)
a = zeros(nv,nv);
for ic=1:nc
    k1=con(ic,1);
    k2=con(ic,2);
    aux=1/R(ic);
    a(k1,k1)=a(k1,k1)+aux;
    a(k2,k2)=a(k2,k2)+aux;
    a(k1,k2)=a(k1,k2)-aux;
    a(k2,k1)=a(k2,k1)-aux;
end
return
end
```

Analisemos a relação

$$\underline{I} \;=\; \underline{\underline{A}}\;\underline{V}$$

- $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{nv} \times \mathbb{R}^{nv}$ é simétrica.
- Sempre que $\underline{V}$ tiver todas as componentes iguais, não haverá corrente em nenhuma conexão do circuito, e por tanto o desbalanço de corrente sera nulo em todos os nós.
- **A matriz $\underline{\underline{A}}$ não é de posto completo. O núcleo dela é o subespaço**

$$S = \{\underline{V} \in \mathbb{R}^{nv} \,|\, V_1 = V_2 = \ldots = V_{nv}\}$$

Equivalente: A soma das colunas de $\underline{\underline{A}}$ é zero.

- O subespaço S é de dimensão 1. O vetor $\underline{1}$, com todas as componentes iguais a 1, é base de S.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{1} \;=\; \underline{0}$$

- Se um dado vetor de tensões $\underline{V}^*$ produz um desbalanço $\underline{I}^*$, então $\underline{V}^* + \alpha\,\underline{1}$ produzirá o mesmo $\underline{I}^*$.

$$\underline{I} = \underline{\underline{A}}\ \underline{V}$$

- Em índices,

$$\sum_{j=1}^{nv} A_{ij}\, V_j = I_i \quad \forall i = 1, \ldots, nv$$

- A soma das linhas de $\underline{\underline{A}}$ é zero. **Isto implica que qualquer que seja $\underline{V}$ a soma de todas as correntes I_i será zero**.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{nv} I_i &= \sum_{i=1}^{nv}, \sum_{j=1}^{nv} A_{ij}\, V_j \\ &= \sum_{j=1}^{nv}, \underbrace{\sum_{i=1}^{nv} A_{ij}}\ V_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

- A imagem da função $\underline{F}(\underline{V}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{V}$ é o subespaço

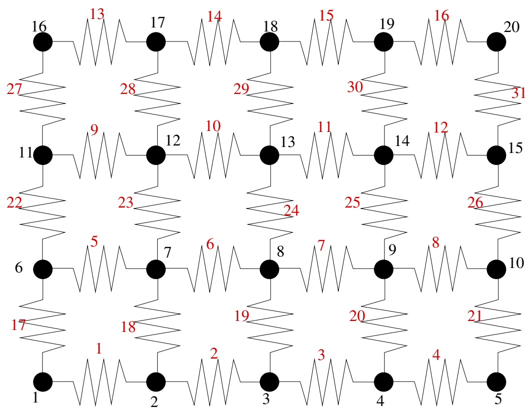
$$W = \{\underline{I} \in \mathbb{R}^{nv} \,|\, \underline{I}^T\, \underline{1} = 0\}$$

$\underline{F}$ não é sobrejetora.

- Para cada vetor de correntes injetadas $\underline{I}$, **que somem zero**, haverá um vetor de potenciais $\underline{V}$ satisfazendo $\underline{\underline{A}}\,\underline{V} = \underline{I}$.

Esse vetor $\underline{V}$ estará indeterminado a menos de um potencial constante. Essa indeterminação pode ser evitada fixando o potencial de qualquer um (mas só um!) dos nós, equivalente matemático do “mandar a terra”.

As correntes no circuito



Quando os potenciais nodais valem $\underline{V}$, a corrente na conexão k (definida positiva indo do primeiro nó de k ao segundo) vale

```
J(k)=(V(con(k,1))-V(con(k,2)))/R(k)
```

Essa relação também é linear, e pode ser expressa por uma matriz. Vamos definir a matriz $\underline{\underline{D}}$ de **diferenças de potenciais**, sendo

$$D_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \texttt{con(k,1)} \\ -1 & \text{se } j = \texttt{con(k,2)} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

tal que $\underline{\underline{D}}$ multiplicada por um vetor de potenciais arbitrário $\underline{V}$ nos devolve a diferença de potencial em cada conexão do circuito.

```
D = zeros(nc,nv);
for ic=1:nc
 D(ic,con(ic,1)) = 1;
 D(ic,con(ic,2)) = -1;
end
```

No exemplo, se $\underline{Z} = \underline{\underline{D}}\ \underline{V}$ (em Matlab/Octave seria `Z=D*V`), então

$$Z_1 = V_1 - V_2, \ldots Z_{21} = V_5 - V_{10}, \ldots$$

As correntes $\underline{J}$ no circuito surgem de

$$\underline{J} \;=\; \begin{pmatrix} 1/R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/R_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1/R_{nc} \end{pmatrix} \;\underline{\underline{D}}\;\;\underline{V}$$

Chamemos à matriz diagonal com as conductâncias de cada conexão $\underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{nc\times nc}$.

$$\underline{J} \;=\; \underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{D}}\;\underline{V}$$

ou

```
for k=1:nc, J(k)=1/R(k)*Z(k); end
```

A dissipação térmica no circuito

A dissipação Φ em uma resistência R é

$$\Phi = J\,\Delta V = J^2\,R = (\Delta V)^2/R$$

sendo ΔV a diferença de potencial entre os extremos e J a corrente ($= \Delta V/R$ com sinal).

```
for k=1:nc
 Diss(k) = J(k)*Z(k)
end
```

A dissipação total do circuito é, por tanto,

$$\Phi = \sum_{k=1}^{nc} \mathrm{Diss}_k = \underline{Z}^T\,\underline{J} = \left(\underline{\underline{D}}\,\underline{V}\right)^T\;\underline{J}$$

ou também

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(\underline{\underline{D}}\,\underline{V}\right)^T\;\underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{D}}\;\underline{V}\\ &= \underline{V}^T\;\left(\underline{\underline{D}}^T\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}\right)\;\underline{V}\end{aligned}$$

Por outro lado, **impor o potencial de cada nó equivale, fisicamente, colocar uma fonte de tensão de valor V_i entre cada nó i e terra**.
A potência fornecida pela fonte i vale

$$P_i = V_i\,I_i$$

e a potencia total das fontes é

$$P = \sum_{i=1}^{nv} V_i\,I_i = \underline{V}^T\,\underline{I}$$

por tanto,

$$P = \underline{V}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{V}$$

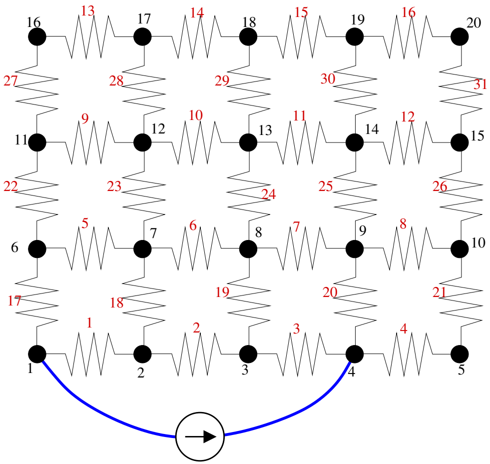
Pela conservação da energia, para todo $\underline{V}$,

$$\Phi = P$$

o que implica (mediante outro bonito teorema de representação)

$$\underline{\underline{A}} \;=\; \underline{\underline{D}}^T\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{D}}$$

A resposta do circuito a uma fonte de corrente



Vamos supor que colocamos uma fonte de corrente de valor i^* saindo do nó Q e chegando no nó P, mantendo os outros nós sem conexões externas.
O desbalanço de corrente será zero em todos os nós, exceto $I_P = i^*$ e $I_Q = -i^*$.
Por ser $\sum_i I_i = 0$, $\underline{I} \in W$, existe $\underline{V}^*$ tal que

$$\underline{\underline{A}}\, \underline{V}^* \;=\; \underline{I}^*$$

Esse vetor $\underline{V}^*$ está indeterminado a menos de uma constante aditiva. Isto é, **sem colocar um nó a terra não existe um valor único de V_i^*, mas sim de $V_i^* - V_j^*$, para todo i e j.**

Entendido isto, podemos fixar um nó t a um potencial qualquer de terra V_{ref} (e.g. zero), para retirar a singularidade de $\underline{\underline{A}}$. A equação número t então fica $V_t = V_{ref}$, e a matriz passa a ser outra, que chamaremos $\underline{\underline{\widetilde{A}}}$ e que é inversível ($\det(\underline{\underline{\widetilde{A}}}) \neq 0$):

```
function Atil=Aterra(A,t)
Atil = A;
Atil(t,:) = 0; Atil(t,t) = 1;
return
```

No caso particular de uma fonte de corrente única, podemos escolher $t = Q$, em cujo caso resolveremos

$$\underline{\underline{\widetilde{A}}}\, \underline{V}^* \;=\; \underline{b}$$

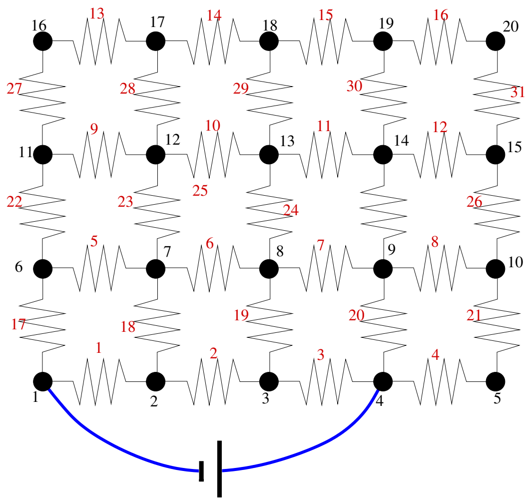
sendo $b_P = i^*$, $b_Q = V_{ref}$, e as outras componentes zero:

```
function [atil b]=Atilde(nv,a,n1,vref,n2,i)
%fonte de corrente entre n1 (terra) e n2, valor i
atil = a;        b = zeros(nv,1);
atil(n1,:) = 0; atil(n1,n1) = 1;
b(n2)=i; b(n1)=vref;
return
```

Uma vez resolvido `V=atil\b`, a resistência equivalente entre P e Q é $(V_P - V_{ref})/i^*$,

```
req = (V(p)-vref)/i
```

A resposta do circuito a uma fonte de tensão



Sendo uma só fonte de valor v^* do nó Q ao nó P, podemos conectar Q a terra e P ao valor $V_{ref} + v^*$

```
function [atil b]=ftensao(nv,a,q,vref,p,v)
%fonte de tensao entre q (terra) e p, valor v
atil = a;        b = zeros(nv,1);
atil(q,:) = 0; atil(q,q) = 1; b(q)=vref;
atil(p,:) = 0; atil(p,p) = 1; b(p)=vref+v;
return
end
```

Uma vez calculadas as voltagens resolvendo

$$\underline{\underline{\widetilde{A}}}\ \underline{V^*} \ = \ \underline{b}$$

podemos calcular a corrente em cada conexão fazendo

$$\underline{J} = \underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{V^*}$$

e o desbalanço de correntes como

$$\underline{I} = \underline{\underline{A}}\ \underline{V^*}$$

Em particular, a corrente injetada pela fonte é

$$i^* = I_p = -I_Q$$

```
istar = A(p,:)*V = -A(q,:)*V
```

A resistência equivalente entre P e Q é

$$r_{PQ} = v^*/i^*$$