SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 9 (16 de maio de 2014)

Algoritmo geral: Para resolver o sistema

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* = \underline{b} \qquad (*)$$

sem fatorar $\underline{\underline{A}}$, e considerando por hipótese que a solução $\underline{x}^*$ é unica, os métodos que consideramos consistem de

- Uma matriz $\underline{\underline{P}}$ que *sim* conseguimos fatorar ou resolver de alguma maneira (por exemplo porque ela é diagonal, ou porque é triangular, ou porque é ortogonal, etc., dependendo do método particular).
- Uma receita para escolher números α_1, α_2, etc., que se correspondem com o "parâmetro de avanço" ou "learning rate" do método do gradiente visto no capítulo anterior.

Esses ingredientes, junto com um "chute initial", ou condição inicial $\underline{x}^{(0)}$ e uma *tolerância* TOL, são combinados no seguinte algoritmo geral:
A: Conhecido $\underline{x}^{(k)}$, fazer

1. Calcular $\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(k)}$.
2. If $\|\underline{r}^{(k)}\| <$ TOL aceitar $\underline{x}^{(k)}$ como solução.
3. Resolver $\underline{\underline{P}}\,\underline{d}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$.
4. Calcular α_k (tem métodos em que todos os α_k são iguais a uma constante fixa, tornando esse passo trivial).
5. Atualizar $\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k\,\underline{d}^{(k)}$.
6. Fazer $k \longleftarrow k+1$ e voltar a A.

Responda à esquerda de cada afirmação se ela é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):

1. (F) O algoritmo converge mais rapidamente quanto maior seja a norma de $\underline{\underline{P}}$.
2. (V) Para as matrizes estritamente diagonais dominantes por linha, o método de Gauss-Seidel sempre converge.
3. (F) Para as matrizes estritamente diagonais dominantes por linha, o método de Jacobi nunca converge.
4. (F) O algoritmo converge mais rapidamente quanto mais parecida seja a matriz $\underline{\underline{P}}$ do método com a matriz $\underline{\underline{A}}^{-1}$.
5. (V) O método de Gauss-Seidel é um caso particular do algoritmo geral, com $\underline{\underline{P}}$ igual à parte triangular *inferior* de $\underline{\underline{A}}$ e $\alpha_k = 1$.
6. (V) O método de Jacobi é um caso particular do algoritmo geral, com $\underline{\underline{P}}$ igual à diagonal de $\underline{\underline{A}}$.
7. (F) Para uma matriz 2×2, pode acontecer que o método de Jacobi seja convergente e o de Gauss-Seidel seja divergente, e vice-versa.
8. (V) O código abaixo é uma programação válida de uma iteração do método de Gauss-Seidel

```
for i=1:n
 x(i)=b(i);
 for j=1:n
   if (j != i)
     x(i)=x(i)-A(i,j)*x(j);
   end
 end
 x(i)=x(i)/A(i,i);
end
```

9. (F) O método de Gauss-Seidel é um caso particular do algoritmo geral, com $\underline{\underline{P}}$ igual à parte triangular *superior* de $\underline{\underline{A}}$ e $\alpha_k = 1$.
10. (F) O método de *refinamentos sucessivos*, utilizado para reduzir o erro de arredondamento, é um caso particular do algoritmo geral, com $\underline{\underline{P}}$ igual à matriz $\underline{\underline{A}^{-1}}$.
11. (V) A convergência ou divergência do algoritmo geral, quando $\alpha_k = \alpha$ constante, depende de se os valores absolutos dos autovalores de uma certa matriz são (ou não) todos menores que 1. A matriz em questão é
$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}} - \alpha\,\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}$$
12. (V) Com a escolha de $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}$ e $\alpha_k = 1$, o algoritmo converge em uma iteração, qualquer que seja a matriz $\underline{\underline{A}}$.
13. (F) Partindo do mesmo ponto inicial $\underline{x}^{(0)}$, o método de Jacobi vai calcular o mesmo segundo ponto $\underline{x}^{(1)}$ para os dois sistemas seguintes,
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$
e
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$
que são obviamente equivalentes.

Boa prova! Valerá 1,5 pontos cada resposta correta, a partir da sétima.