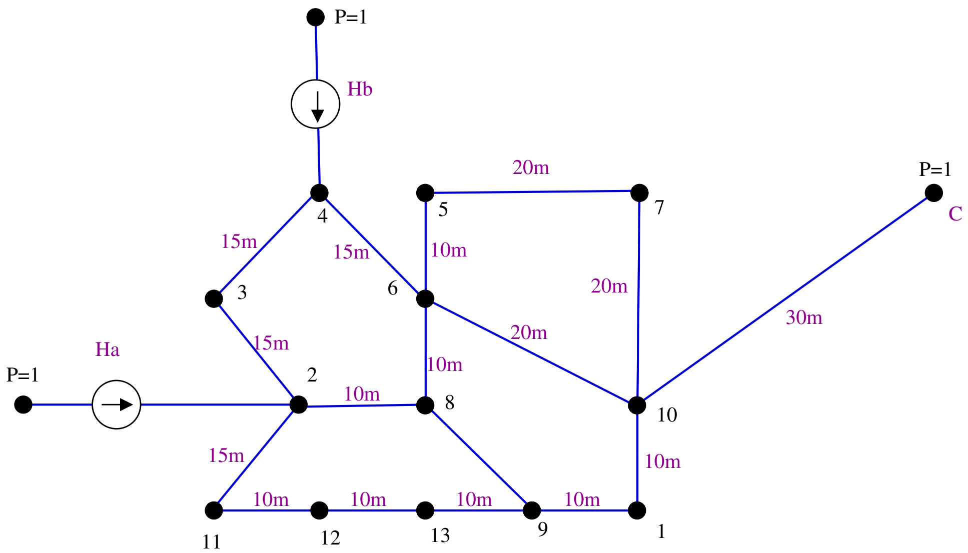
SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 6 (11 de abril de 2014)

Ex. 1 (5 pontos) Rede hidráulica



Na rede hidráulica da figura, todos os canos seguem a lei de perda de pressão vs. vazão

$$\Delta p = k\, L\, Q$$

onde Q é a vazão, L o comprimento, k uma constante de resistência, assumida valendo 0.1 bar-sec/m^4 para todos os canos (com exceção do cano onde estão as bombas, cujas resistências são desprezíveis). Os pontos marcados com $P = 1$ estão a pressão atmosférica $p = 1$ bar, e não existe consumo em nenhum dos nós 1 a 13.
Se deseja calcular coeficientes α e β tais que a vazão que sai pelo ponto C satisfaça

$$Q_C = \alpha\, H_a \,+\, \beta\, H_b$$

onde H_a e H_b são os saltos de pressão nas bombas da figura.
Escreva um pequeno código em Octave que calcule α e β em variáveis chamadas `alpha` e `beta`.

```
% adicionamos o no 14 no ponto C (uma possibilidade)
nv = 14; nc = 17;
con = [11 2; 11 12; 12 13; 13 9; 9 1; 1 10; 10 7; 7 5; 5 6; 6 8; 6 10; 8 2; 2 3; 3 4; 4 6; 8 9; 10 14];
kl = [1.5 1 1 1 1 1 2 2 1 1 2 1 1.5 1.5 1.5 1.5 3];
a=zeros(nv,nv); b=zeros(nv);
for ic=1:nc
 k1=con(ic,1); k2=con(ic,2); aux=1/kl(ic);
 a(k1,k1)=a(k1,k1)+aux;
 a(k2,k2)=a(k2,k2)+aux;
 a(k1,k2)=a(k1,k2)-aux;
 a(k2,k1)=a(k2,k1)-aux;
end
% os vertices 2, 4 e 14 tem a pressao imposta (o 14 sempre em 1)
a(2,:)=0; a(2,2)=1; a(4,:)=0; a(4,4)=1; a(14,:)=0; a(14,14)=1; b(14)=1;
% para calcular alpha colocamos Ha=1, Hb=0
b(2)=2; b(4)=1;
p = a\b; alpha=(p(10)-p(14))/kl(17);
% para calcular beta colocamos Ha=0, Hb=1
b(2)=1; b(4)=2;
p = a\b; beta=(p(10)-p(14))/kl(17);

e acaba dando

alpha =  0.12976
beta =  0.092140
```

Ex. 2 (5 pontos) Responda V(erdadeiro) ou F(also) à esquerda de cada item

1. No circuito do Ex. 1, a vazão pela bomba a é uma função linear de H_a, isto é

$$Q_a = C_a\, H_a$$

F, em particular quando $H_a = 0$ a vazão Q_a não é zero (de fato terá vazão contrária ao sentido da bomba.

2. No circuito do Ex. 1, a vazão pela bomba a é uma função linear de H_a e H_b, isto é

$$Q_a = C_a\, H_a \; + \; C_b\, H_b$$

V, porque o sistema é linear e as únicas "excitações" são H_a e H_b. Quando $H_a = H_b = 0$ o sistema todo está a $p = 1$ e com vazão zero em todas as conexões.

3. Porque o ponto C está a $P = 1$ e não a $P = 0$, a pressão no ponto 1 é uma função linear de H_a e H_b.
F, em particular porque a pressão no ponto 1 não é uma função linear de H_a e H_b. Quando ambas são zero, P_1 vale 1.

4. Porque o ponto C está a $P = 1$ e não a $P = 0$, a pressão no ponto 1 não é uma função linear de H_a e H_b.
V, porque já vimos que P_1 não é função linear de H_a e H_b. Se a pressão atmosférica, colocada valendo 1 em três pontos do circuito, valesse zero, então P_1 seria uma função linear de H_a e H_b.

5. Uma vez obtida a fatoração LU de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ de n linhas e n colunas, para resolver qualquer sistema da forma

$$\underline{\underline{A}}\; \underline{x} \;=\; \underline{b}$$

são necessárias $2\,n^2$ operações.
V.

6. Uma vez obtida a fatoração LU de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ de n linhas e n colunas, para resolver qualquer sistema da forma

$$\underline{\underline{A}}\; \underline{x} \;=\; \underline{b}$$

são necessárias $2\,n^3$ operações.
F

7. Uma vez obtida a fatoração LU de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ de n linhas e n colunas, para resolver qualquer sistema da forma

$$\underline{\underline{A}}\; \underline{x} \;=\; \underline{b}$$

são necessárias $n + 2$ operações.
F, de fato para uma matriz arbitrária os fatores L e U contém n^2 números, motivo pelo qual é impossível que o número de operações seja de ordem linear em n.

8. Para obter a fatoração LU de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ de n linhas e n colunas são necessárias n^2 operações.
F. Para uma matriz geral são necessárias $2n^3/3$ operações.

9. O custo computacional de obter a fatoração LU de uma matriz $\underline{\underline{A}}$ é muito maior que o custo de resolver um sistema da forma

$$\underline{\underline{A}}\; \underline{x} \;=\; \underline{b}$$

uma vez que os fatores $\underline{\underline{L}}$ é $\underline{\underline{U}}$ já foram calculados.
V, porque o custo de resolver é $2n^2$ operações.

10. Uma vez calculada a fatoração LU de uma matriz, $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}}$, o determinante dela pode ser calculada fazendo

```
for i=1:n, det=1; det=det*U(i,i)*L(i,i); end
```

V, porque `det(U*L)=det(U)*det(L)`.

11. Se uma matriz tem determinante positivo, então ela pode ser fatorada da forma
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$$
F, a matriz deve ser simétrica e ter todos os seus autovalores não negativos. Mas não precisava saber isto. Bastava ver que, se $\underline{\underline{A}}$ satisfaz a fatoração acima, então ela é necessáriamente simétrica,
$$\underline{\underline{A}}^T = \left(\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T\right) = (\underline{\underline{H}}^T)^T\,\underline{\underline{H}}^T = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T = \underline{\underline{A}}$$
Tomando uma matriz qualquer com determinante positivo mas não simétrica, ela serve como contraexemplo da afirmação.

12. Se uma matriz tem determinante negativo, então ela não pode ser fatorada da forma
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$$
V. Se a fatoração pudesse ser feita, teriamos
$$\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T) = \det(\underline{\underline{H}})\,\det(\underline{\underline{H}}^T) = \det(\underline{\underline{H}})^2 \geq 0$$
o que contradiz que $\underline{\underline{A}}$ tenha determinante negativo. Veja que não precisava saber que a condição necessária e suficiente para responder corretamente (simétrica e com autovalores não negativos).

13. Se uma matriz é simétrica, então ela pode ser fatorada da forma
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$$
F, um contraexemplo fácil é uma matriz simétrica com determinante negativo (por exemplo a identidade com apenas um dos 1 da diagonal trocado por -1).

14. Se uma matriz não é simétrica, então ela não pode ser fatorada da forma
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T$$
V, já comentado.

15. O pivotamento é necessário para evitar divisões por zero, mas não ajuda na precisão. F

16. A precisão da fatoração LU é maior quanto maior é o número de condição da matriz (razão entre o maior e o menor autovalor).

    F, é justamente o contrário. A precisão cresce quando o número de condição se aproxima de 1 (ver que K é sempre ≥ 1).

17. O custo de realizar a fatoração de uma matriz tridiagonal é proporcional a n^2 (o quadrado do número de linhas).

    F, é proporcional a n.

18. O custo de resolver um sistema linear com matriz tridiagonal é proporcional a n^2 (o quadrado do número de equações). F

19. O custo de resolver um sistema linear com matriz tridiagonal é proporcional a n (o número de equações). V

20. Se a fatoração LU sem pivotamento de uma matriz falhar, isto quer dizer que a matriz é singular ou, no mínimo, bastante mal condicionada.

    F, apenas quer dizer que alguma das matrizes construidas como as primeiras k filas e colunas da matriz sendo fatoradas é singular.

21. Em Octave, quando se resolve um sistema linear $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, se o lado direito $\underline{b}$ é fornecido com 14 dígitos corretos, então a solução $\underline{x}$ é obtida com 14 dígitos corretos. F

22. Em Octave, quando se resolve um sistema linear $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, se o lado direito $\underline{b}$ é fornecido com 14 dígitos corretos, então a solução $\underline{x}$ é obtida com apenas 7 dígitos corretos. F

23. Em Octave, quando se resolve um sistema linear $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, se o lado direito $\underline{b}$ é fornecido com erro relativo de 10^{-4}, então a solução $\underline{x}$ é obtida com erro relativo não maior que $\sqrt{10^{-4}} = 10^{-2}$.

    F. Essa afirmação e as duas anteriores são falsas porque a precisão do cálculo depende do número de condição da matriz.

24. Na fatoração QR, se computam matrizes $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{R}}$ tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ sendo $\underline{\underline{Q}}$ uma matriz diagonal e $\underline{\underline{R}}$ uma matriz de rotação.
    F, a matriz $\underline{\underline{Q}}$ é ortogonal e a matriz $\underline{\underline{R}}$ é triangular superior.
25. Na fatoração QR, se computam matrizes $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{R}}$ tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ sendo $\underline{\underline{Q}}$ uma matriz ortogonal e $\underline{\underline{R}}$ uma matriz racional. F
26. Na fatoração QR, se computam matrizes $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{R}}$ tais que $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ sendo $\underline{\underline{Q}}$ uma matriz ortogonal e $\underline{\underline{R}}$ uma matriz triangular superior. V
27. Na fatoração QR de uma matriz, o fator $\underline{\underline{R}}$ é sempre simétrico.
    F. Ele poderia ser simétrico se fosse quadrado e diagonal, mas em geral (com $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$) a matriz $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e é triangular superior.
28. Na fatoração QR de uma matriz, o fator $\underline{\underline{R}}$ nunca é singular. F. Por exemplo a matriz zero tem $\underline{\underline{R}}$ identicamente nula. Notar que o determinante de $\underline{\underline{Q}}$ é ou +1 ou -1.
29. Se $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ (fatoração QR), então $\underline{\underline{A}}^T\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}^T\,\underline{\underline{Q}}$.
    F, de fato
    $$\underline{\underline{A}}^T\,\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{R}})^T\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T\,\underline{\underline{Q}}^T\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^T\,\underline{\underline{R}}$$
30. Se $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ (fatoração QR), então $\underline{\underline{A}}^T\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^T\,\underline{\underline{R}}$.V
31. Se $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$ (fatoração QR), então $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T\,\underline{\underline{R}}^{-1}$.
    F, porque
    $$\underline{\underline{A}}^{-1} = (\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}})^{-1} = \underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^{-1}\,\underline{\underline{Q}}^T$$
32. Na fatoração QR de uma matriz, o fator $\underline{\underline{Q}}$ nunca tem determinante nulo. V
33. O sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, sendo $\underline{\underline{A}}$ de m linhas e n colunas, é dito *sobredeterminado* se $m > n$.V
34. O sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, sendo $\underline{\underline{A}}$ de m linhas e n colunas, é dito *sobredeterminado* se $n > m$.F
35. Um sistema sobredeterminado nunca (i.e., para nenhum $\underline{b}$) tem solução.
    F, por exemplo o sistema um sistema no qual todas as equações são proporcionais
    $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ -3x_1 - x_2 = -3 \\ 6x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$
    É imediato que qualquer $\underline{x}$ da forma $(1-\alpha, 3\alpha)^T$ é solução, para todo valor de α. Trata-se de um sistema sobredeterminado (de acordo com a definição do livro) que possui infinitas soluções. Notar no entanto que, se o lado direito não fosse proporcional a $(1, -1, 2)$ não haveria nenhuma solução.
36. Um sistema sobredeterminado nunca (i.e., para nenhum $\underline{b}$) tem infinitas soluções. F
37. Um sistema sobredeterminado tem, no máximo, uma solução.F
38. Se $\underline{\underline{Q}}$ é uma matriz $m \times m$ ortogonal, então suas colunas constituem uma base ortogonal de $\mathbb{R}^m$.V
39. Se o sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ é sobredeterminado, o comando `x=A\b` calcula um vetor `x` tal que `A*x = b`. F
40. Se o sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ é sobredeterminado, o comando `x=A\b` calcula um vetor `x` tal que

    ```
    A'*A*x = A'*b.
    ```

    V, porque o `x` calculado satisfaz as "equações normais" do sistema, que são justamente $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T\,\underline{b}$.