SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 13 (16 de junho de 2014)

Lembrete:

Teorema: Se $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ satisfazem

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$$

para alguma $\underline{\underline{S}}$, e $(\lambda, \underline{v})$ é auto-par de $\underline{\underline{A}}$, então $(\lambda, \underline{\underline{S}}^{-1}\,\underline{v})$ é auto-par de $\underline{\underline{B}}$.

Método: O método das potências aplicado a uma matriz $\underline{\underline{B}}$ e partindo de um vetor $\underline{y}^{(0)}$ com $\|\underline{y}^{(0)}\| = 1$ consiste em fazer:

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(k)} &= \underline{\underline{B}}\,\underline{y}^{(k-1)} && (1)\\ \underline{y}^{(k)} &= \frac{1}{\|\underline{x}^{(k)}\|}\,\underline{x}^{(k)} && (2)\\ \mu^{(k)} &= (\underline{y}^{(k)})^T\,\underline{\underline{B}}\,\underline{y}^{(k)} && (3)\\ &\text{volta a (1)} && (4) \end{aligned}$$

Teorema: A sequência $\mu^{(k)}$ tende ao autovalor (suposto real e único) de maior valor absoluto da matriz $\underline{\underline{B}}$. A sequência $\underline{y}^{(k)}$ converge ao autovetor correspondente (no caso de autovalor negativo isto requer um ajuste de sinal, mas não vamos entrar nesses detalhes).

Método: O comando `eig` calcula

```
[P Lambda] = eig(A)
```

onde `P` é a matriz que contem os autovetores de `A` como colunas, e `Lambda` é uma matriz diagonal de autovalores.

---

1. (2,5 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ e seja $\underline{\underline{I}}$ a matriz identidade $n \times n$. Dizer se verdadeiro ou falso:
   (a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então $\lambda - q$ é autovalor de $\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. V
   (b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então λ é autovalor de $q\,\underline{\underline{A}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. F
   (c) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então λ^2 é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. V
   (d) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $1/(\lambda + q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. F
   (e) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}} + q\,\underline{\underline{I}}$, para todo $q \in \mathbb{R}$. V
   (f) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}^2$. V
   (g) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$, então 2λ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^2$. F
   (h) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $-\lambda$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. F
   (i) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$ e $q \in \mathbb{R}$ não, então $(1/\lambda) - (1/q)$ é autovalor de $(\underline{\underline{A}} - q\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. F
   (j) Se $\underline{v}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existe, então $\underline{v}$ é também autovetor de $\underline{\underline{A}}^{-1}$. V

2. (1 ponto) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são -1, -2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - 3\,\underline{\underline{I}}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ convergirá para:
   (a) 1
   (b) 3
   (c) -1
   (d) -4 esse
   (e) 1/3
   (f) -2
   (g) 0
   (h) Não convergirá

3. (1,5 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz 4×4 cujos autovalores são -1, -2, 3 e 4. Então, começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} - 8\,\underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ convergirá para:
   (a) 1/4
   (b) $-1/5$
   (c) -2
   (d) 1/8
   (e) $-1/2$
   (f) Nenhum dos anteriores , esse, resposta correta -1/4
   (g) Não convergirá

4. (2,5 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz $n \times n$ conhecida. Começando com um vetor $\underline{x}^{(0)}$ escolhido aleatoriamente, e aplicando o método das potências à matriz $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} - 2\,\underline{\underline{I}})^{-1}$, a sequência dos $\mu^{(k)}$ converge para 6. Então é possível concluir que:

   (a) 6 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$. F

   (b) 1/6 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$. F

   (c) $-7/6$ é autovalor de $\underline{\underline{A}}$. F

   (d) 11/6 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$. F

   (e) 13/6 é autovalor de $\underline{\underline{A}}$. V

   (f) O autovalor mais distante de 2 está a distância 6. F

   (g) O autovalor mais próximo de 2 está a distância 1/6. V

   (h) O autovalor mais distante de 2 está a distância 1/6. F

5. (1 ponto) Seja uma matriz $\underline{\underline{A}}$ **simétrica** $n \times n$, e seja `[S,D]=eig(A)`
   Dizer se verdadeiro ou falso:

   (a) As linhas de $\underline{\underline{S}}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. F

   (b) As colunas de $\underline{\underline{S}}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. V

   (c) $\underline{\underline{S}}$ é simétrica. F

   (d) As linhas de $\underline{\underline{S}}^{-1}$ são autovetores de $\underline{\underline{A}}$. V

6. (2 pontos) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz **simétrica e definida positiva** qualquer, e seja $\underline{\underline{I}}$ a identidade. Dizer se é verdadeiro (V) ou falso (F) que se pode concluir que:

   (a) O método das potências, com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$, convergirá mais rapidamente que com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} + 10\,\underline{\underline{I}}$. V

   (b) O método das potências, com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$, convergirá mais rapidamente que com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^2$. F

   (c) O método das potências, com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$, convergirá mais rapidamente que com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - 10\,\underline{\underline{I}}$. F

   (d) O método das potências, com $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$, convergirá mais rapidamente que com $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{A}} + 10\,\underline{\underline{I}})^{-1}$. V

Boa prova!!