SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 12 (6 de junho de 2014)

Lembrete: A força que uma barra faz sobre seus extremos a e b é dada por

$$\vec{F}^a = -\mathcal{T}\ \check{n}^a \qquad e \qquad \vec{F}^b = -\mathcal{T}\ \check{n}^b$$

onde $\mathcal{T}$ é a tensão, $\check{n}^a$ é o vetor unitário na direção da barra (na treliça relaxada) e "saindo dela", e analogamente para $\check{n}^b$.
Na aproximação linear, a tensão é calculada a partir dos deslocamentos $\vec{u}^a$ e $\vec{u}^b$ com a fórmula

$$\mathcal{T} \ = \ \frac{E\,A}{\ell_0}\ \left(\vec{u}^a \cdot \check{n}^a + \vec{u}^b \cdot \check{n}^b\right)$$

A matriz de rigidez de uma barra é a matriz $\underline{\underline{K}}$ que cumpre

$$\begin{pmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ F_1^b \\ F_2^b \end{pmatrix} \ = \ - \ \underline{\underline{K}} \begin{pmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{pmatrix}$$

Similarmente, a matriz de rigidez de uma treliça é a matriz $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$ que cumpre

$$\underline{F} \ = \ - \ \underline{\underline{\mathbb{K}}}\ \underline{u}$$

onde $\underline{F}$ e $\underline{u}$ são vetores coluna que contem as componentes horizontal e vertical das forças (e deslocamentos, respectivamente) em cada um dos nós da treliça.
A matriz $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$ pode ser calculada com a seguinte função:

```
function Kglo = rigidez(conec,modu,coord)
%nb nro de barras, nv nro de nos,
%modu(1:nb) valor de EA
%coord coordenadas
nb=length(conec);
nv=length(coord);
Kglo=zeros(2*nv,2*nv);
for ib=1:nb
Kloc=zeros(4,4);
na=conec(ib,1); nb=conec(ib,2);
Xa=coord(na,:)';
Xb=coord(nb,:)';
d=Xb-Xa;
ll=norm(d);
kk=modu(ib)/(ll^3);
aux=d*d';
Kloc(1:2,1:2)=kk*aux;
Kloc(1:2,3:4)=-kk*aux;
Kloc(3:4,1:2)=-kk*aux;
Kloc(3:4,3:4)=kk*aux;
%Kloc agora contem a matriz de rigidez
% da barra
loc2glo=[2*na-1,2*na,2*nb-1,2*nb];
for j=1:4
for k=1:4
jglo=loc2glo(j);
kglo=loc2glo(k);
Kglo(jglo,kglo)=Kglo(jglo,kglo)+Kloc(j,k);
end
end
end
%%%
end
```

Um autovetor de autovalor zero de $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$ é um vetor $\underline{v}$ (não nulo) tal que $\underline{\underline{\mathbb{K}}}\,\underline{v} = 0$. Também se diz que um tal vetor pertence ao *núcleo* de $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$.

Considere que está analisando o comportamento de uma estrutura de treliça **bidimensional** (como as analisadas nas aulas), cuja conectividade e coordenadas você já leu de arquivos e estão armazenadas nas matrizes `conec` e `coord`, respectivamente. Os módulos de Young, multiplicados pela área transversal de cada barra, estão por sua vez armazenados na matriz `modu`.
Considere também que você já calculou a matriz de rigidez da estrutura, que armazenou na matriz `Kglo` fazendo

```
Kglo = rigidez(conec,modu,coord);
```

1. (4 pontos) Responda a ezquerda de cada item V se verdadeiro ou F se falso:

   (a) Se dobrarmos o valor de todos os componentes da matriz `modu`, obteremos uma matriz que é o quadruplo de `Kglo`, isto é,

   `KK=rigidez(conec,2*modu,coord)` $\Rightarrow$

   $\Rightarrow$ `KK = 4*Kglo`

   F, o correto é `KK=2*Kglo`

   (b) A matriz `Kglo` tem, no mínimo, quatro autovalores nulos.

   F, no minimo tem 3

   (c) A matriz `Kglo` é antisimétrica, isto é, `Kglo'=-Kglo`.

   F, é simétrica, `Kglo'=Kglo`

   (d) O número de autovalores nulos depende da forma específica da treliça que está sendo analisada.

   V

   (e) Suponha que modificamos a matriz `modu` fazendo `modu(7)=0;` e depois calculamos a matriz de rigidez (executando `K=rigidez(conec,modu,coord)`. Então a matriz `K` resultante corresponderá a ter retirado o nó número 7 da estrutura original

   F, corresponderá a ter retirado a barra número 7 da estrutura original.

   (f) Se dobrarmos o valor de todos os componentes da matriz `coord`, obteremos uma matriz que é o dobro de `Kglo`, isto é

`KK=rigidez(conec,modu,2*coord)` ⇒

⇒ `KK = 2*Kglo`

F, o correto é `KK=Kglo/2`

(g) O determinante de `Kglo` é zero.
V

2. (2,5 pontos) Tendo já calculado `Kglo`, você quer analisar a situação de carregamento seguinte:

   - Os nós 3 e 6 são apoios fixos, não podem movimentar em nenhuma direção.
   - No nó número 10 é aplicada uma força vertical de valor -10000 Newton.
   - Os restantes nós estão livres.

   Escreva as linhas Octave/Matlab necessárias para calcular os deslocamentos `uu` produzidos por essa situação de carregamento.

```
% Calculo de uu+
nv = length(coord);
ff=zeros(2*nv,1);
ff(20,1)=-10000;
iden=eye(2*nv,2*nv);
KK=Kglo;
KK(5:6,:)=iden(5:6,:);
KK(11:12,:)=iden(11:12,:);
uu=KK\ff;
```

3. (2,5 pontos) Tendo já calculado `Kglo`, você quer analisar essa outra situação de carregamento:

   - Os nós 3 e 6 são apoios fixos, não podem movimentar em nenhuma direção.
   - Para considerar de maneira aproximada o peso da estrutura, se associa a cada nó uma certa massa. No caso da estrutura sendo considerada, a massa "apoiada" em cada um dos nós (todos eles) é de 100 kg.

   Escreva as linhas Octave/Matlab necessárias para calcular os deslocamentos `up` produzidos por essa situação de carregamento.

```
% Calculo de uu+
nv = length(coord);
ff=zeros(2*nv,1);
ff(2:2:2*nv,1)=-981;
iden=eye(2*nv,2*nv);
KK=Kglo;
KK(5:6,:)=iden(5:6,:);
ff(5:6)=0;
KK(11:12,:)=iden(11:12,:);
ff(11:12)=0;
uu=KK\ff;
```

4. (1,5 pontos) Considere os vetores deslocamento `uu` e `up` calculados nos dois exercícios anteriores. Sob qual situação de carregamento serão obtido o deslocamento **soma** de `uu` e `up`? Descreva de maneira parecida ao feito nos enunciados dos exercícios 2 e 3. (E boa prova!)

   Será a carga combinada dos casos anteriores, porque tem os mesmos pontos fixos.