SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Prova 10 (23 de maio de 2014)

---

1. (3 pontos) Considerando sistemas lineares de n equações com n incógnitas responda se cada afirmação abaixo é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) **no campo correspondente**:

   (a) (F) Se o determinante de uma matriz é zero, a primeira de suas colunas é combinação linear das $n-1$ restantes.

   (b) (F) Se $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* = \underline{b}$, e $\underline{\underline{B}}$ é uma matriz obtida a partir de permutações das colunas de $\underline{\underline{A}}$, então $\underline{\underline{B}}\,\underline{x}^* = \underline{b}$.

   (c) (V) Se $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal não-nulos, então o sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ pode ser resolvido em aproximadamente n^2 operações.

   (d) (F) O objetivo da decomposição LU é achar, para uma dada matriz $\underline{\underline{A}}$, uma matriz triangular inferior $\underline{\underline{L}}$ com 1's na diagonal, e uma matriz triangular superior $\underline{\underline{U}}$, tais que $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$.

   (e) (V) Se obter os fatores LU de uma matriz tridiagonal de 100×100 demora 1 segundo, então para uma matriz tridiagonal de 1000×1000 a demora será de aproximadamente 10 segundos.

   (f) (F) Se durante a fatoração LU sem pivotamento aparece um pivô zero, então a matriz que está sendo fatorada é singular.

2. (3 pontos) Considere o método do gradiente: Dados $\underline{\underline{A}}$ (matriz simétrica definida positiva), $\underline{b}$ e $\underline{x}^{(0)}$, fazer para $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\underline{r}^{(k)} &= \underline{b} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(k)} \\
\underline{d}^{(k)} &= \underline{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{r}^{(k)}}{(\underline{d}^{(k)})^T \underline{\underline{A}}\,\underline{d}^{(k)}} \\
\underline{x}^{(k+1)} &= \underline{x}^{(k)} + \alpha_k\, \underline{d}^{(k)} \\
k{+}{+} & \quad \text{e voltar}
\end{aligned}$$

   e seja $\underline{x}^*$ a solução do sistema, isto é, $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* = \underline{b}$. Responda se cada afirmação abaixo é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) **no campo correspondente**:

   (a) (V) Se $\underline{x}^* - \underline{x}^{(0)}$ é autovetor de $\underline{\underline{A}}$, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (b) (F) Se a dimensão do problema é 2 (em particular, a matriz $\underline{\underline{A}}$ é 2×2) então o $\underline{x}^{(k)}$ convergirá a $\underline{x}^*$ em no máximo 2 iterações.

   (c) (V) Se $\underline{\underline{A}}$ é um múltiplo da identidade, o método converge em 1 (uma) iteração.

   (d) (F) O gradiente de
$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$
   no ponto $\underline{x}^{(k+1)}$ é ortogonal a $\underline{r}^{(k+1)}$.

   (e) (V) O gradiente de
$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$
   no ponto $\underline{x}^{(k+1)}$ é ortogonal a $\underline{d}^{(k)}$.

   (f) (V) Para uma matriz $\underline{\underline{M}}$ que **não é simétrica**, o gradiente de
$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x}^T\,\underline{\underline{M}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$
   satisfaz
$$\nabla F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\,\left(\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}^T\right)\,\underline{x} - \underline{b}$$
   e não mais
$$\nabla F(\underline{x}) = \underline{\underline{M}}\,\underline{x} - \underline{b}.$$

3. (4,5 pontos) Considere a função
$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2}\,\underline{x}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{x}^T\,\underline{b}$$
   com
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Ao longo da reta que passa pelo ponto $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ na direção $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, a função F pode ser escrita como função de α, isto é,
$$F\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = a_0 + a_1\,\alpha + a_2\,\alpha^2.$$
   Calcular a_0, a_1 e a_2.

$a_0 =$ 6
$a_1 =$ -40
$a_2 =$ 64

Boa prova!