Cálculo de Auvalores e Autovetores para Matrizes Simétricas

Prof. Afonso Paiva

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP – São Carlos

Métodos Numéricos e Computacionais – SME0305
2013

Revisão: Matriz Ortogonal

Definição

Uma matriz $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *cujas n colunas (e linhas) formam um conjunto ortonormal é dita ortogonal.*

Proposição

Se $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *é ortogonal então:*

- $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$;
- $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2, \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Revisão: Matriz Ortogonal

Definição

Uma matriz $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *cujas n colunas (e linhas) formam um conjunto ortonormal é dita ortogonal.*

Proposição

Se $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *é ortogonal então:*

- $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$;
- $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2, \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Revisão: Matrizes Semelhantes

Definição

As matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n,n)$ *são semelhantes se existir* $\mathbf{P} \in M(n,n)$ *invertível, tal que:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Proposição

Se $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes então elas possuem os mesmos autovalores.*

Revisão: Matrizes Semelhantes

Definição

As matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n,n)$ *são semelhantes se existir* $\mathbf{P} \in M(n,n)$ *invertível, tal que:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Proposição

Se $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes então elas possuem os mesmos autovalores.*

Revisão: Matrizes Simétricas

Toda matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal $\mathbf{V} \in M(n,n)$, isto é:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^\top \mathbf{A} \mathbf{V}$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal formada pelos autovalores (todos reais) de $\mathbf{A}$ e as colunas de $\mathbf{V}$ são os seus respectivos autovetores.

Método de Francis (ou QR)

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ vamos usar a Decomposição QR para calcular todos os seus autovalores e autovetores.

Processo

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1\\
&\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2\\
&\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3\\
&\vdots\\
&\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}\\
&\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}
\end{aligned}
$$

Método de Francis (ou QR)

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ vamos usar a Decomposição QR para calcular todos os seus autovalores e autovetores.

Processo

$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$

$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$

$\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3$

$\vdots$

$\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}$

$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$

Método de Francis (ou QR)

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ vamos usar a Decomposição QR para calcular todos os seus autovalores e autovetores.

Processo

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$$
$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}$$
$$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$$

Método de Francis (ou QR)

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ vamos usar a Decomposição QR para calcular todos os seus autovalores e autovetores.

Processo

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 \\
&\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2 \\
&\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3 \\
&\vdots \\
&\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \\
&\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}
\end{aligned}
$$

Método de Francis (ou QR)

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$ vamos usar a Decomposição QR para calcular todos os seus autovalores e autovetores.

Processo

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1\\
&\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2\\
&\mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_2\mathbf{Q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3\\
&\vdots\\
&\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-2} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}\\
&\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}
\end{aligned}
$$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Prova: Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\ \mathbf{A}_{k-1}\ \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\ \mathbf{A}_{k-2}\ \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\ \ \vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\cdots\mathbf{Q}_{1}^{\top}\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{\top}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes. $\square$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Prova: Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\ \mathbf{A}_{k-1}\ \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\ \mathbf{A}_{k-2}\ \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\ \ \vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\cdots\mathbf{Q}_{1}^{\top}\ \mathbf{A}_{1}\ \mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{\top}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes. $\square$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Prova: Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\,\mathbf{A}_{k-1}\,\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\,\mathbf{A}_{k-2}\,\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\;\vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^{\top}\mathbf{Q}_{k-2}^{\top}\cdots\mathbf{Q}_{1}^{\top}\,\mathbf{A}_{1}\,\mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)^{\top}\,\mathbf{A}\,\left(\mathbf{Q}_{1}\cdots\mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes. $\square$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Prova: Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \; \mathbf{A}_{k-1} \; \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top \; \mathbf{A}_{k-2} \; \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top \cdots \mathbf{Q}_1^\top \; \mathbf{A}_1 \; \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1})^\top \; \mathbf{A} \; (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1})
\end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^\top \mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes. $\square$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Prova: Como $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1} \Rightarrow \mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$.

Temos que, $\mathbf{A}_k = \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \; \mathbf{A}_{k-1} \; \mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top \; \mathbf{A}_{k-2} \; \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{Q}_{k-1}^\top \mathbf{Q}_{k-2}^\top \cdots \mathbf{Q}_1^\top \; \mathbf{A}_1 \; \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1} \\
&= \left(\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)^\top \; \mathbf{A} \; \left(\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-2}\mathbf{Q}_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$ temos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}^\top \mathbf{A}\mathbf{V}$ são semelhantes. $\square$

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Proposição

A sequência $\mathbf{A}_k$ *converge para uma matriz diagonal.*

Logo, os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_k$ fornecem uma aproximação para os autovalores de $\mathbf{A}$, enquanto que as colunas da matriz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_{k-1}$$

uma aproximação dos seus respectivos autovetores.

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Proposição

A sequência $\mathbf{A}_k$ *converge para uma matriz diagonal.*

Logo, os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_k$ fornecem uma aproximação para os autovalores de $\mathbf{A}$, enquanto que as colunas da matriz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$$

uma aproximação dos seus respectivos autovetores.

Método de Francis (ou QR)

Proposição

As matrizes $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}_k$ *possuem os mesmos autovalores.*

Proposição

A sequência $\mathbf{A}_k$ *converge para uma matriz diagonal.*

Logo, os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_k$ fornecem uma aproximação para os autovalores de $\mathbf{A}$, enquanto que as colunas da matriz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$$

uma aproximação dos seus respectivos autovetores.

Método de Francis – MATLAB

```
function [D,V] = francis(A,kmax)
n = size(A,1);
V = eye(n);
for k=1:kmax
    %QR via Gram-Schmidt modificado
    [Q,R] = mgs(A); %ou [Q,R] = qr(A);
    A = R*Q;
    V = V*Q;
end
D = diag(A);
```

Método de Francis – MATLAB

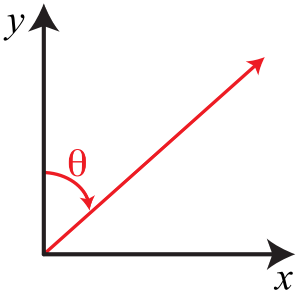
Exemplo

Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$ usando 10 iterações do Método de Francis. Compare sua solução com a resposta da função `[D,V] = eig(A)`.

Matriz de Rotação



Rotação no sentido horário

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotação no sentido anti-horário

$$R(-\theta) = R^{-1}(\theta) = R^{\top}(\theta)$$

Matrizes de rotação são ortogonais.

Rotação de Givens

Dado um par de índicies (p, q) com $p < q$ e um dado ângulo θ a matriz de rotação de Givens é dada por:

$$R(p,q,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & p & & q & & \end{array} & \end{array}$$

com $c = \cos(\theta)$ e $s = \operatorname{sen}(\theta)$. **Observação:** caso $p > q$, temos que $R(p,q,\theta) = R^\top(q,p,\theta)$, isto é, o seno muda de sinal.

Rotação de Givens

Dado um par de índicies (p, q) com $p < q$ e um dado ângulo θ a matriz de rotação de Givens é dada por:

$$R(p,q,\theta) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & p & & q & & \end{array} & \end{array}$$

com $c = \cos(\theta)$ e $s = \text{ sen}(\theta)$. **Observação:** caso $p > q$, temos que $R(p,q,\theta) = R^{\top}(q,p,\theta)$, isto é, o seno muda de sinal.

Rotação de Givens

Dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o produto $\mathbf{y} = R^\top(p,q,\theta)\mathbf{x}$ é equivalente a rotação do vetor $\mathbf{x}$ em θ radianos no sentido anti-horário no plano dos eixos (x_p, x_q). Segue que,

$$y_k = \begin{cases} cx_p - sx_q, & k = p \\ sx_p + cx_q, & k = q \\ x_k, & k \neq p,q \end{cases}$$

Note que $R^\top(p,q,\theta)$ altera apenas as linhas p e q de $\mathbf{x}$.

Para anular y_q na equação acima. Basta tomar:

$$c = \frac{x_p}{r} \quad \text{e} \quad s = -\frac{x_q}{r} \quad \text{com} \quad r = \sqrt{x_p^2 + x_q^2}$$

Rotação de Givens

Dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o produto $\mathbf{y} = R^\top(p, q, \theta)\mathbf{x}$ é equivalente a rotação do vetor $\mathbf{x}$ em θ radianos no sentido anti-horário no plano dos eixos (x_p, x_q). Segue que,

$$y_k = \begin{cases} cx_p - sx_q, & k = p \\ sx_p + cx_q, & k = q \\ x_k, & k \neq p, q \end{cases}$$

Note que $R^\top(p, q, \theta)$ altera apenas as linhas p e q de $\mathbf{x}$.

Para anular y_q na equação acima. Basta tomar:

$$c = \frac{x_p}{r} \quad \text{e} \quad s = -\frac{x_q}{r} \quad \text{com} \quad r = \sqrt{x_p^2 + x_q^2}$$

Rotação de Givens

Dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o produto $\mathbf{y} = R^\top(p, q, \theta)\mathbf{x}$ é equivalente a rotação do vetor $\mathbf{x}$ em θ radianos no sentido anti-horário no plano dos eixos (x_p, x_q). Segue que,

$$y_k = \begin{cases} cx_p - sx_q, & k = p \\ sx_p + cx_q, & k = q \\ x_k, & k \neq p, q \end{cases}$$

Note que $R^\top(p, q, \theta)$ altera apenas as linhas p e q de $\mathbf{x}$.

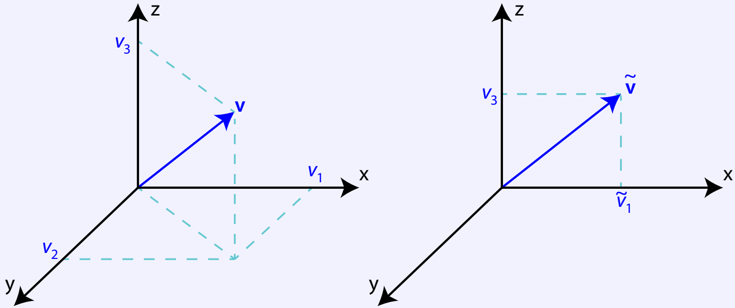
Para anular y_q na equação acima. Basta tomar:

$$c = \frac{x_p}{r} \quad \text{e} \quad s = -\frac{x_q}{r} \quad \text{com} \quad r = \sqrt{x_p^2 + x_q^2}$$

Rotação de Givens

Exemplo

Dada o vetor $\mathbf{v} = (4, 3, 7)^\top$. Use a rotação de Givens para anular o elemento v_2.



Rotação de Givens

Exemplo (continuação)

Dada o vetor $\mathbf{v} = (4, 3, 7)^\top$. Use a rotação de Givens (em torno do eixo z) para anular o elemento v_2.

Solução:

Vamos calcular $\tilde{\mathbf{v}} = R^\top(1, 2, \theta)\mathbf{v}$. Assim,

$$R(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad c = \frac{4}{5} \quad s = -\frac{3}{5}$$

Rotação de Givens

Exemplo (continuação)

Dada o vetor $\mathbf{v} = (4, 3, 7)^\top$. Use a rotação de Givens (em torno do eixo z) para anular o elemento v_2.

Solução:
Vamos calcular $\widetilde{\mathbf{v}} = R^\top(1, 2, \theta)\mathbf{v}$. Assim,

$$R(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad c = \frac{4}{5} \quad s = -\frac{3}{5}$$

Rotação de Givens

Exemplo (continuação)

Solução:

$$R(1,2,\theta) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad c = \frac{4}{5} \quad s = -\frac{3}{5}$$

Portanto,

$$\widetilde{\mathbf{v}} = R^{\top}(1,2,\theta)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Rotação de Jacobi

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$. A rotação de Jacobi é uma rotação $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$ que quando aplicada como uma transformação similar:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{J}^\top \mathbf{A} \mathbf{J} = \widetilde{\mathbf{A}}\,,$$

anula um par de elementos simétricos fora da diagonal de $\mathbf{A}$.

$$\begin{bmatrix} * & & & \cdots & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{qp} & \cdots & a_{qq} & & \\ & & & & & \ddots & \\ * & & & \cdots & & & * \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} * & & & \cdots & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & \widetilde{a}_{pp} & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & \widetilde{a}_{qq} & & \\ & & & & & \ddots & \\ * & & & \cdots & & & * \end{bmatrix}$$

Rotação de Jacobi

Dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n,n)$. A rotação de Jacobi é uma rotação $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$ que quando aplicada como uma transformação similar:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{J}^\top \mathbf{A} \mathbf{J} = \widetilde{\mathbf{A}}\,,$$

anula um par de elementos simétricos fora da diagonal de $\mathbf{A}$.

$$\begin{bmatrix} * & & & \cdots & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{qp} & \cdots & a_{qq} & & \\ & & & & & \ddots & \\ * & & & \cdots & & & * \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} * & & & \cdots & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & \widetilde{a}_{pp} & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & \widetilde{a}_{qq} & & \\ & & & & & \ddots & \\ * & & & \cdots & & & * \end{bmatrix}$$

Rotação de Jacobi

Exemplo

Seja $\mathbf{A} \in M(4,4)$. Use a rotação de Jacobi $\mathbf{J} = R(2,4,\theta)$ em $\mathbf{A}$.

Solução:

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c - a_{24}s & a_{23}c - a_{34}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12}s + a_{14}c & a_{22}s + a_{24}c & a_{23}s + a_{34}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix}$$

Rotação de Jacobi

Exemplo

Seja $\mathbf{A} \in M(4,4)$. Use a rotação de Jacobi $\mathbf{J} = R(2,4,\theta)$ em $\mathbf{A}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^\top \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c - a_{24}s & a_{23}c - a_{34}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12}s + a_{14}c & a_{22}s + a_{24}c & a_{23}s + a_{34}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Rotação de Jacobi

Exemplo (continuação)

Solução:

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{A}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c - a_{24}s & a_{23}c - a_{34}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12}s + a_{14}c & a_{22}s + a_{24}c & a_{23}s + a_{34}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}c - a_{14}s & a_{13} & a_{12}s + a_{14}c \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c^2 - 2a_{24}cs + a_{44}s^2 & a_{23}c - a_{34}s & (a_{22} - a_{44})\,cs + a_{24}\left(c^2 - s^2\right) \\ a_{13} & a_{23}c - a_{34}s & a_{33} & a_{23}s + a_{34}c \\ a_{12}s + a_{14}c & (a_{22} - a_{44})\,cs + a_{24}\left(c^2 - s^2\right) & a_{23}s + a_{34}c & a_{22}s^2 + 2a_{24}cs + a_{44}c^2 \end{bmatrix}$$

O resultado segue de forma análogo para matrizes simétricas de ordem n. Note que, a rotação (p, q) de Jacobi altera apenas os elementos das linhas e colunas p e q de $\mathbf{A}$.

Rotação de Jacobi

Exemplo (continuação)

Solução:

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{A} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c - a_{24}s & a_{23}c - a_{34}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{12}s + a_{14}c & a_{22}s + a_{24}c & a_{23}s + a_{34}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}c - a_{14}s & a_{13} & a_{12}s + a_{14}c \\ a_{12}c - a_{14}s & a_{22}c^2 - 2a_{24}cs + a_{44}s^2 & a_{23}c - a_{34}s & (a_{22} - a_{44})\, cs + a_{24}\left(c^2 - s^2\right) \\ a_{13} & a_{23}c - a_{34}s & a_{33} & a_{23}s + a_{34}c \\ a_{12}s + a_{14}c & (a_{22} - a_{44})\, cs + a_{24}\left(c^2 - s^2\right) & a_{23}s + a_{34}c & a_{22}s^2 + 2a_{24}cs + a_{44}c^2 \end{bmatrix}$$

O resultado segue de forma análogo para matrizes simétricas de ordem n. Note que, a rotação (p, q) de Jacobi altera apenas os elementos das linhas e colunas p e q de $\mathbf{A}$.

Idéia do Método de Jacobi

O Método de Jacobi consiste em, dada uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in M(n, n)$, aplicar uma série de transformações similares:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{J}_k^\top \mathbf{A}_k \mathbf{J}_k$$

onde $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$.

Idéia do Método de Jacobi

Após n passos do Método de Jacobi temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{J}_n^\top \cdots \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_1^\top \ \mathbf{A} \ \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n \\
&= \left(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n\right)^\top \ \mathbf{A} \ \left(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n\right) \\
&= \mathbf{V}^\top \ \mathbf{A} \ \mathbf{V}
\end{aligned}
$$

Assim, a sequência $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots\}$ converge para uma matriz diagonal $\mathbf{D} \Rightarrow$ os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_{n+1}$ fornecem uma *aproximação* dos autovalores de $\mathbf{A}$.

Além disso, as colunas de $\mathbf{V} = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n$ fornecem uma *aproximação* dos autovetores correspondentes.

Idéia do Método de Jacobi

Após n passos do Método de Jacobi temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{J}_n^\top \cdots \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_1^\top \ \mathbf{A}\ \mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n \\ &= (\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n)^\top \ \mathbf{A}\ (\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n) \\ &= \mathbf{V}^\top\ \mathbf{A}\ \mathbf{V}\end{aligned}$$

Assim, a sequência $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots\}$ converge para uma matriz diagonal $\mathbf{D} \Rightarrow$ os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_{n+1}$ fornecem uma *aproximação* dos autovalores de $\mathbf{A}$.

Além disso, as colunas de $\mathbf{V} = \mathbf{J}_1\mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n$ fornecem uma *aproximação* dos autovetores correspondentes.

Idéia do Método de Jacobi

Após n passos do Método de Jacobi temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{J}_n^\top \cdots \mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_1^\top \ \mathbf{A} \ \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n \\
&= (\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n)^\top \ \mathbf{A} \ (\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n) \\
&= \mathbf{V}^\top \ \mathbf{A} \ \mathbf{V}
\end{aligned}
$$

Assim, a sequência $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots\}$ converge para uma matriz diagonal $\mathbf{D} \Rightarrow$ os elementos da diagonal de $\mathbf{A}_{n+1}$ fornecem uma *aproximação* dos autovalores de $\mathbf{A}$.

Além disso, as colunas de $\mathbf{V} = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_n$ fornecem uma *aproximação* dos autovetores correspondentes.

Método de Jacobi

Dada $\mathbf{A} \in M(n,n)$ simétrica. O método de Jacobi consiste nos seguintes passos:

1. Escolha um par de índices (p,q), com $1 \leq p < q \leq n$;
2. Calcule o par seno-cosseno (c,s) tal que:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{pp} & \widetilde{a}_{pq} \\ \widetilde{a}_{pq} & \widetilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

   seja diagonal;
3. Atualize $\mathbf{A}$ com $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{A} \mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$.

Método de Jacobi

Dada $\mathbf{A} \in M(n,n)$ simétrica. O método de Jacobi consiste nos seguintes passos:

1. Escolha um par de índices (p,q), com $1 \leq p < q \leq n$;
2. Calcule o par seno-cosseno (c,s) tal que:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{pp} & \tilde{a}_{pq} \\ \tilde{a}_{pq} & \tilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

   seja diagonal;
3. Atualize $\mathbf{A}$ com $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$.

Método de Jacobi

Dada $\mathbf{A} \in M(n,n)$ simétrica. O método de Jacobi consiste nos seguintes passos:

1. Escolha um par de índices (p,q), com $1 \leq p < q \leq n$;
2. Calcule o par seno-cosseno (c,s) tal que:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{pp} & \widetilde{a}_{pq} \\ \widetilde{a}_{pq} & \widetilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

   seja diagonal;
3. Atualize $\mathbf{A}$ com $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^\top \mathbf{A} \mathbf{J}$, onde $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$.

Método de Jacobi

Diagonalizar

$$\begin{bmatrix} \widetilde{a}_{pp} & \widetilde{a}_{pq} \\ \widetilde{a}_{pq} & \widetilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{pp}c^2 - 2a_{pq}cs + a_{qq}s^2 & \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) \\ \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) & a_{pp}s^2 + 2a_{pq}cs + a_{qq}c^2 \end{bmatrix}$$

é o mesmo que dizer que:

$$0 = \widetilde{a}_{pq} = \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right)$$

Se $a_{pq} = 0$, basta tomar $(c, s) = (1, 0)$.

Método de Jacobi

Diagonalizar

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{pp} & \tilde{a}_{pq} \\ \tilde{a}_{pq} & \tilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{pp}c^2 - 2a_{pq}cs + a_{qq}s^2 & \left(a_{pp} - a_{qq}\right)cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) \\ \left(a_{pp} - a_{qq}\right)cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) & a_{pp}s^2 + 2a_{pq}cs + a_{qq}c^2 \end{bmatrix}$$

é o mesmo que dizer que:

$$0 = \tilde{a}_{pq} = \left(a_{pp} - a_{qq}\right)cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right)$$

Se $a_{pq} = 0$, basta tomar $(c, s) = (1, 0)$.

Método de Jacobi

Diagonalizar

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{pp} & \tilde{a}_{pq} \\ \tilde{a}_{pq} & \tilde{a}_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{pp}c^2 - 2a_{pq}cs + a_{qq}s^2 & \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) \\ \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) & a_{pp}s^2 + 2a_{pq}cs + a_{qq}c^2 \end{bmatrix}$$

é o mesmo que dizer que:

$$0 = \tilde{a}_{pq} = \left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right)$$

Se $a_{pq} = 0$, basta tomar $(c, s) = (1, 0)$.

Método de Jacobi

Caso contrário ($a_{pq} \neq 0$). A partir da equação:

$$\left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq}\left(c^2 - s^2\right) = 0$$

e usando o fato de:

$$cs = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta) \quad \text{e} \quad c^2 - s^2 = \cos(2\theta)$$

Temos que:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \qquad (1)$$

Método de Jacobi

Caso contrário ($a_{pq} \neq 0$). A partir da equação:

$$\left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq} \left(c^2 - s^2\right) = 0$$

e usando o fato de:

$$cs = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta) \quad \text{e} \quad c^2 - s^2 = \cos(2\theta)$$

Temos que:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \tag{1}$$

Método de Jacobi

Caso contrário ($a_{pq} \neq 0$). A partir da equação:

$$\left(a_{pp} - a_{qq}\right) cs + a_{pq} \left(c^2 - s^2\right) = 0$$

e usando o fato de:

$$cs = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta) \quad \text{e} \quad c^2 - s^2 = \cos(2\theta)$$

Temos que:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \tag{1}$$

Método de Jacobi

Por outro lado, temos:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\mathrm{sen}(2\theta)} = \frac{c^2 - s^2}{2cs} = \frac{\frac{c^2-s^2}{c^2}}{\frac{2cs}{c^2}} = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow t^2 + 2\tau t - 1 = 0$$

onde $t = \tan(\theta)$.

Agora basta determinar os valores de t que são raízes da equação acima. Logo,

$$t^2 + 2\tau t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 + 4}}{2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$$

Multiplicando o numerador e denominador de t por $\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$:

$$t = \frac{1}{\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}}$$

Método de Jacobi

Por outro lado, temos:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\text{sen}(2\theta)} = \frac{c^2 - s^2}{2cs} = \frac{\frac{c^2 - s^2}{c^2}}{\frac{2cs}{c^2}} = \frac{1 - t^2}{2t} \Rightarrow t^2 + 2\tau t - 1 = 0$$

onde $t = \tan(\theta)$.

Agora basta determinar os valores de t que são raízes da equação acima. Logo,

$$t^2 + 2\tau t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 + 4}}{2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$$

Multiplicando o numerador e denominador de t por $\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$:

$$t = \frac{1}{\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}}$$

Método de Jacobi

Por outro lado, temos:

$$\tau = \cot(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{c^2 - s^2}{2cs} = \frac{\frac{c^2-s^2}{c^2}}{\frac{2cs}{c^2}} = \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow t^2 + 2\tau t - 1 = 0$$

onde $t = \tan(\theta)$.

Agora basta determinar os valores de t que são raízes da equação acima. Logo,

$$t^2 + 2\tau t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 + 4}}{2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$$

Multiplicando o numerador e denominador de t por $\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}$:

$$t = \frac{1}{\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}}$$

Método de Jacobi

Computacionalmente, adotamos

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\tau+\sqrt{\tau^2+1}} & , \tau \geq 0 \\ \\ \frac{1}{\tau-\sqrt{\tau^2+1}} & , \tau < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Note que escolhemos o sinal positivo ou negativo de modo a obter o denominador de maior módulo. Assim, sempre teremos $|t| \leq 1$.

Finalmente, podemos calcular c e s através das equações abaixo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad s = tc\,. \tag{3}$$

Método de Jacobi

Computacionalmente, adotamos

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\tau + \sqrt{\tau^2+1}} & , \tau \geq 0 \\ \\ \frac{1}{\tau - \sqrt{\tau^2+1}} & , \tau < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Note que escolhemos o sinal positivo ou negativo de modo a obter o denominador de maior módulo. Assim, sempre teremos $|t| \leq 1$.

Finalmente, podemos calcular c e s através das equações abaixo:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad s = tc\,. \tag{3}$$

Critérios de Parada para os Métodos de Francis e Jacobi

Dada uma tolêrancia $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$. Temos os seguintes critérios de parada:

- $\max_{i<j} \left\{ |a_{ij}| \right\} < \varepsilon$
- $\mathit{off}(\mathbf{A}) < \varepsilon$, com

$$\mathit{off}(\mathbf{A}) = \sqrt{\|\mathbf{A}\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} (a_{ii})^2}$$

Critérios de Parada para os Métodos de Francis e Jacobi

Dada uma tolêrancia $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$. Temos os seguintes critérios de parada:

- $\max_{i<j} \left\{ |a_{ij}| \right\} < \varepsilon$
- $\mathit{off}\left(\mathbf{A}\right) < \varepsilon$, com

$$\mathit{off}\left(\mathbf{A}\right) = \sqrt{\|\mathbf{A}\|_F^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ii}\right)^2}$$

Implementação

$\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$;
`enquanto` $\mathit{off}(\mathbf{A}) > \varepsilon$ `faça`
    `escolha` (p,q) `tal que` $|a_{pq}| = \max_{i<j}\{|a_{ij}|\}$;
    `calcule` τ `pela` Equação 1;
    `calcule` t `pela` Equação 2;
    `calcule` (c,s) `pela` Equação 3;
    `construa a matriz` $\mathbf{J} = R(p,q,\theta)$;
    `calcule` $\mathbf{A} = \mathbf{J}^\top \mathbf{A}\mathbf{J}$;
    `calcule` $\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{J}$;
`fim do enquanto`

Método de Jacobi – MATLAB

```
function [D,V] = rot_jac(A,tol)
n = size(A,1);
V = eye(n);
while sqrt(norm(A,'fro')^2 - norm(diag(A))^2) > tol
    [v,p] = max(triu(abs(A),1)); [v,q] = max(v); p = p(q);
    if ( abs(A(p,q)) < eps)
        c = 1; s =0;
    else
        tau = (A(q,q)-A(p,p))/(2*A(p,q));
        if (tau >= 0)
            t = 1/(tau+sqrt(1+tau^2));
        else
            t = 1/(tau-sqrt(1+tau^2));
        end
        c = 1/sqrt(1+t^2); s = t*c;
    end
J = eye(n); J(p,p) = c; J(p,q) = s; J(q,p) = -s; J(q,q) = c;
A = J'*A*J;
V = V*J;
end
D = diag(A);
```

Exemplo

Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule uma aproximação dos autovalores de **A** usando 4 iterações do Método de Jacobi.

Solução:

O maior elemento em valor absluto acima da diagonal de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ é $a_{23} = 3$. Logo,

$$\tau = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{6 - 5}{6} \approx 0.1667$$

Exemplo

Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule uma aproximação dos autovalores de $\mathbf{A}$ usando 4 iterações do Método de Jacobi.

Solução:
O maior elemento em valor absluto acima da diagonal de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$ é $a_{23} = 3$. Logo,

$$\tau = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{6-5}{6} \approx 0.1667$$

Exemplo (continuação)

Solução:
Usando o valor τ, calculamos $t = 0.8471$, $c = 0.7630$ e $s = 0.6464$.

Definimos,

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.7630 & 0.6464 \\ 0.0000 & -0.6464 & 0.7630 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}_1^{\top}\mathbf{A}_1\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 4.0000 & 1.5260 & 1.2928 \\ 1.5260 & 2.4586 & 0.0000 \\ 1.2928 & 0.0000 & 8.5414 \end{bmatrix}$$

Exemplo (continuação)

Solução:
Usando o valor τ, calculamos $t = 0.8471$, $c = 0.7630$ e $s = 0.6464$.

Definimos,

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.7630 & 0.6464 \\ 0.0000 & -0.6464 & 0.7630 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{J}_1^\top \mathbf{A}_1 \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 4.0000 & 1.5260 & 1.2928 \\ 1.5260 & 2.4586 & 0.0000 \\ 1.2928 & 0.0000 & 8.5414 \end{bmatrix}$$

Exemplo (continuação)

Solução:
O maior elemento em valor absluto fora da diagonal de $\mathbf{A}_2$ é $a_{12} = 1.5260$.

Assim, $\tau = -0.5050$, $t = -0.6153$, $c = 0.8517$ e $s = -0.5240$.

Definimos,

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0.8517 & -0.5240 & 0.0000 \\ 0.5240 & 0.8517 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{J}_2^\top \mathbf{A}_2 \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 4.9387 & 0.0000 & 1.1011 \\ 0.0000 & 1.5197 & -0.6774 \\ 1.1011 & -0.6774 & 8.5414 \end{bmatrix}$$

Exemplo (continuação)

Solução:
O maior elemento em valor absluto acima da diagonal de $\mathbf{A}_3$ é $a_{13} = 1.1011$.

Assim, $\tau = 1.6360$, $t = 0.2814$, $c = 0.9626$ e $s = 0.2709$.

Definimos,

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0.9626 & 0.0000 & 0.2709 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.2709 & 0.0000 & 0.9626 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{J}_3^\top \mathbf{A}_3 \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 4.6611 & 0.1239 & 0.0000 \\ 0.1239 & 1.5197 & -0.6520 \\ 0.0000 & -0.6520 & 8.8539 \end{bmatrix}$$

Exemplo (continuação)

Solução:

O maior elemento em valor absluto acima da diagonal de $\mathbf{A}_4$ é $a_{23} = -0.6520$.

Assim, $\tau = -5.6266$, $t = -0.0882$, $c = 0.9961$ e $s = 0.0879$.

Definimos,

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9961 & -0.0879 \\ 0.0000 & 0.0879 & 0.9961 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_5 = \mathbf{J}_4^\top \mathbf{A}_4 \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} 4.6228 & 0.1827 & -0.0161 \\ 0.1239 & 1.4621 & -0.0000 \\ -0.0161 & 0.0000 & 8.9081 \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são aproximados por

$$\{4.6228, 1.462, 8.9081\}.$$