Método da Potência

Gabriela Reis
Afonso Paiva Neto

30/05/2014

Seja $\mathbf{A} \in M(n, n)$ *diagonalizável* com

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

Objetivo

Encontrar λ_1 e seu autovetor associado $\mathbf{v}_1$.

Algoritmo

Dado $\mathbf{q}^{(0)} \neq \bar{\mathbf{0}}$ com $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{z}^{(k)}/\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\ \lambda^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k)} \end{aligned}$$

Lembrando

$\lambda^{(k)} \approx \lambda_1$ e $\mathbf{q}^{(k)} \approx \mathbf{v}_1$.

Algoritmo

Dado $\mathbf{q}^{(0)} \neq \bar{\mathbf{0}}$ com $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{z}^{(k)} / \|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\ \lambda^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k)} \end{aligned}$$

Lembrando

$\lambda^{(k)} \approx \lambda_1$ e $\mathbf{q}^{(k)} \approx \mathbf{v}_1$.

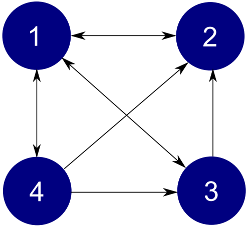
Método da Potência

```
function [lambda,q1,iter]=power_iter(A,q0,tol)
q0 = q0/norm(q0);
z0 = A*q0;
q1 = z0/norm(z0);
iter = 1;
while (abs(abs(q0'*q1) - 1) > tol)
    q0 = q1;
    z0 = A*q0;
    q1 = z0/norm(z0);
    iter = iter + 1;
end
lambda = q1'*A*q1;
```

Aplicação: *PageRank*

Exemplo

Page 2
www
WELCOME!
1 Page
Page 3
www
WELCOME!
1 Page
2 Page
Page 4
www
WELCOME!
1 Page
2 Page
3 Page
Page 1
www
WELCOME!
2 Page
3 Page
4 Page



1
2
3
4

Procedimento

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

Procedimento

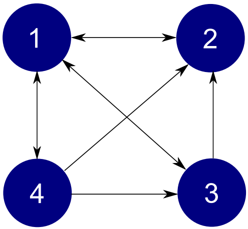
- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

Matriz de conectividade



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Probabilidade

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Probabilidade

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Probabilidade

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedimento

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

- Em seguida, iremos usar o método das potências em $\mathbf{P}$;
  - Por quê? Porque esse autovetor dominante nos dará o PageRank!

Procedimento

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

- Em seguida, iremos usar o método das potências em $\mathbf{P}$;
  - Por quê? Porque esse autovetor dominante nos dará o PageRank!

Procedimento

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

- Em seguida, iremos usar o método das potências em $\mathbf{P}$;
    - Por quê? Porque esse autovetor dominante nos dará o PageRank!

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

- Em seguida, iremos usar o método das potências em $\mathbf{P}$;
- De posse do autovetor dominante $\mathbf{q}^{(k)}$, podemos concluir:
  - Seja $q_i^{(k)} = \max\{q_j^{(k)} \mid j = 1, \ldots, n\}$, a página i é a mais relevante.

Procedimento

- É definida uma matriz de conectividade $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a página } j \text{ tem link para página } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Da matriz $\mathbf{A}$ é criada uma matriz de probabilidade $\mathbf{P}$;

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{c_j}, \quad \text{onde} \quad c_j = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{kj}$$

- Em seguida, iremos usar o método das potências em $\mathbf{P}$;
- De posse do autovetor dominante $\mathbf{q}^{(k)}$, podemos concluir:
    - Seja $q_i^{(k)} = \max\{q_j^{(k)} \mid j = 1, \dots, n\}$, a página i é a mais relevante.

Exemplo

Calcule o PageRank usando:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{q}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$ e $tol = 10^{-6}$.

Solução

Temos que $\lambda_1 = 1.0000$ e seu autovetor associado $\mathbf{v}_1 \approx (0.755, 0.503, 0.3356, 0.2518)^T$. Portanto, o site 1 é o mais relevante enquanto que o site 4 é o menos relevante.

Exemplo

Calcule o PageRank usando:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{q}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$ e $tol = 10^{-6}$.

Solução

Temos que $\lambda_1 = 1.0000$ e seu autovetor associado $\mathbf{v}_1 \approx (0.755, 0.503, 0.3356, 0.2518)^T$. Portanto, o site 1 é o mais relevante enquanto que o site 4 é o menos relevante.

Teorema de Perron-Frobenius

Se a matriz $\mathbf{A} \in M(n, n)$ tem apenas entradas não negativas e o somatório de cada uma de suas colunas é 1, então:

1. Um dos seus autovalores é positivo e dominante;
2. O seu maior autovalor é 1;
3. Existe um único autovetor positivo correspondente ao autovalor dominante.

Seja $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *invertível*, então encontrar o menor autovalor em módulo e o seu respectivo autovetor. Lembrando que

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots > |\lambda_n|.$$

Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n = \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{v}_n$$

Se λ_n é o menor autovalor em módulo de $\mathbf{A} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n}$ é o maior autovalor em módulo de $\mathbf{A}^{-1}$.

Seja $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *invertível*, então encontrar o menor autovalor em módulo e o seu respectivo autovetor. Lembrando que

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots > |\lambda_n|.$$

Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n = \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{v}_n$$

Se λ_n é o menor autovalor em módulo de $\mathbf{A} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n}$ é o maior autovalor em módulo de $\mathbf{A}^{-1}$.

Seja $\mathbf{A} \in M(n,n)$ *invertível*, então encontrar o menor autovalor em módulo e o seu respectivo autovetor. Lembrando que

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots > |\lambda_n|.$$

Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_n = \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{v}_n$$

Se λ_n é o menor autovalor em módulo de $\mathbf{A} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n}$ é o maior autovalor em módulo de $\mathbf{A}^{-1}$.

Método da Potência Inversa

Algoritmo

Dado $\mathbf{q}^{(0)} \neq \bar{0}$ com $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}^{(k-1)} \Rightarrow \text{resolva o sist. linear } \mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)} \\
\mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{z}^{(k)}/\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\
\lambda^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k)}
\end{aligned}
$$

Lembrando

$\lambda^{(k)} \approx \lambda_n$ e $\mathbf{q}^{(k)} \approx \mathbf{v}_n$.

Algoritmo

Dado $\mathbf{q}^{(0)} \neq \overline{0}$ com $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}^{(k-1)} \Rightarrow \text{resolva o sist. linear } \mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{z}^{(k)}/\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\ \lambda^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}^{(k)} \end{aligned}$$

Lembrando

$\lambda^{(k)} \approx \lambda_n$ e $\mathbf{q}^{(k)} \approx \mathbf{v}_n$.

Método da Potência Inversa

Algoritmo

Dado $\mathbf{q}^{(0)} \neq \bar{\mathbf{0}}$ com $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q}^{(k-1)} \Rightarrow \text{resolva o sist. linear } \mathbf{Az}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{z}^{(k)}/\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2 \\ \lambda^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k)} \cdot \mathbf{Aq}^{(k)} \end{aligned}$$

Lembrando

$\lambda^{(k)} \approx \lambda_n$ e $\mathbf{q}^{(k)} \approx \mathbf{v}_n$.

```
function [lambda,q1,iter]=powerinv_iter(A,q0,tol)
q0 = q0/norm(q0);
z0 = A\q0;
q1 = z0/norm(z0);
iter = 1;
while(abs(abs(q0'*q1) - 1) > tol)
    q0 = q1;
    z0 = A\q0;
    q1 = z0/norm(z0);
    iter = iter + 1;
end
lambda = q1'*A*q1
```

Exemplo

Encontrar o menor autovalor em módulo e seu respectivo autovetor, sendo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{q}^{(0)} = (1,0,0,0)^T$ e $tol = 10^{-6}$.