SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176 - Sala 4-219
gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 9 (5 de maio de 2014)

Algoritmo geral: Para resolver o sistema

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* \;=\; \underline{b} \qquad\qquad (*)$$

sem fatorar $\underline{\underline{A}}$ os métodos que consideramos consistem de

- Uma matriz $\underline{\underline{P}}$ que *sim* conseguimos fatorar ou resolver de alguma maneira (por exemplo porque ela é diagonal, ou porque é triangular, ou porque é ortogonal, etc., dependendo do método particular).
- Uma receita para escolher números α_1, α_2, etc., que se correspondem com o "parâmetro de avanço" ou "learning rate" do método do gradiente visto no capítulo anterior.

Esses ingredientes, junto com um "chute initial", ou condição inicial $\underline{x}^{(0)}$ e uma *tolerância* TOL, são combinados no seguinte algoritmo geral:
A: Conhecido $\underline{x}^{(k)}$, fazer

1. Calcular $\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(k)}$.
2. If $\|\underline{r}^{(k)}\| <$ TOL aceitar $\underline{x}^{(k)}$ como solução.
3. Resolver $\underline{\underline{P}}\,\underline{d}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$.
4. Calcular α_k (tem métodos em que todos os α_k são iguais a uma constante fixa, tornando esse passo trivial).
5. Atualizar $\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k\,\underline{d}^{(k)}$.
6. Fazer $k \longleftarrow k+1$ e voltar a A.

---

1. Provar que, no algoritmo geral acima, se $\underline{\underline{P}}$ é escolhida **igual a** $\underline{\underline{A}}$ e $\alpha_k = 1$, $\forall k$, então o método calcula a solução **exata** $\underline{x^*}$ em **uma** iteração (considere desprezível o erro de arredondamento).

   Ajuda: Veja que o passo 3 nesse caso é

   $$\underline{\underline{A}}\,\underline{d}^{(0)} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(0)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^{(0)}$$

   e por tanto $\underline{d}^{(0)} = \underline{x}^* - \underline{x}^{(0)}$, o que substituindo no passo 5 com $\alpha_0 = 1$ dá $\underline{x}^{(1)} = \underline{x}^*$ qualquer que seja $\underline{x}^{(0)}$.

2. Constatar que o método do exercício anterior é ridículo, já que no passo 3 precisa ser resolvida a matriz $\underline{\underline{A}}$, e se pudéssemos fazer isto diretamente resolveriamos a equação de saida (*) e pronto.

Moral: Queremos que $\underline{\underline{P}}$ seja tão parecida a $\underline{\underline{A}}$ quanto possível, sem sair do conjunto de matrizes que conseguimos resolver (ao qual $\underline{\underline{A}}$ assumimos que não pertence).

---

3. O **método de Jacobi** está definido por $\underline{\underline{P}} = \mathrm{diag}(\underline{\underline{A}}) =$ e $\alpha_k = 1$, $\forall k$. Certamente podemos resolver matrizes diagonais, e a diagonal de $\underline{\underline{A}}$ pode ser considerada como a matriz diagonal "mais parecida" com $\underline{\underline{A}}$.

   Chamando de $\underline{\underline{D}}$ à diagonal de $\underline{\underline{A}}$, e chamando de $\underline{\underline{B}}$ (bottom) e $\underline{\underline{T}}$ (top) as partes triangulares inferior e superior de $\underline{\underline{A}}$ tais que

   $$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{T}}$$

   prove que o método de Jacobi pode ser sintetizado como

   $$\underline{\underline{D}}\,\underline{x}^{(k+1)} = -\underline{\underline{B}}\,\underline{x}^{(k)} - \underline{\underline{T}}\,\underline{x}^{(k)} + \underline{b}$$

4. Confira que o método de Jacobi para o sistema

   $$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

   se traduz no método "intuitivo"

   $$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\,x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\,x_1^{(k)} - a_{23}\,x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\,x_1^{(k)} - a_{32}\,x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

   no qual "da primeira equação é obtida a primeira incógnita deixando as outras fixas nos valores da iteração anterior, e analogamente para a segunda e a terceira".

5. Confira se a seguinte programação em Matlab/Octave implementa uma iteração do método de Jacobi.

```
for i=1:n
 xnew(i)=b(i);
 for j=1:n
   if (j != i)
     xnew(i)=xnew(i)-A(i,j)*xold(j);
   end
 end
 xnew(i)=xnew(i)/A(i,i);
end
```

   Programe uma função `function x=jacobi(A,b,tol,nmax)` baseada no programinha anterior, que resolva pelo método de Jacobi o sistema `A*x=b` com tolerância `tol` e número máximo de iterações `nmax`.

6. O **método de Gauss-Seidel** é uma variante do método de Jacobi na qual sempre é usado o último valor calculado de cada variável. A programação (comparar com Jacobi) seria

```
for i=1:n
 x(i)=b(i);
 for j=1:n
   if (j != i)
     x(i)=x(i)-A(i,j)*x(j);
   end
 end
 x(i)=x(i)/A(i,i);
end
```

7. Prove que o método de Gauss-Seidel é um caso particular do algoritmo geral (*), com $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{B}}$ e $\alpha_k = 1$, $\forall\, k$.
8. Prove que, no algoritmo geral (*), a matriz de evolução (que chamaremos $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ para manter parecido com o livro) que satisfaz

   $$\underline{x}^* - \underline{x}^{(k+1)} = \underline{\underline{\mathbb{B}}}\,\left(\underline{x}^* - \underline{x}^{(k)}\right)$$

   é dada por (quando α é constante)

   $$\underline{\underline{\mathbb{B}}} \;=\; \underline{\underline{\mathbb{I}}} - \alpha\,\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}$$

   Verificar que quando $\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{A}}$ e $\alpha = 1$ o método converge em uma iteração, como já provado em outro exercío.
9. Mostre um sistema linear (2×2) para o qual o método de Jacobi convirja e o método de Gauss-Seidel não, e viceversa (ou prove que isto é impossível!).
10. Mostre um sistema linear (2×2) para o qual o método de Gauss-Seidel convirja mais rápido que o método de Jacobi, e viceversa.

Boa prática!!