SME0305 - 2014

Gustavo Carlos Buscaglia

ICMC - Ramal 738176, gustavo.buscaglia@gmail.com

Lista 6 (31 de março de 2014)

Sistemas lineares

1. **Red hidráulica:** Considere um bairro quadrado de `n` quadras por `n` quadras. Cada bloco (espaço quadrado entre as ruas) tem casas que, para cada bloco, consomem uma vazão total Q^* (`Qstar`) conhecida de água. O bairro é alimentado a uma pressão P^* (`Pstar`) nas quatro esquinas.

   Sabendo que as quadras estão conectadas por uma rede quadrada, com a estrutura dos circuitos elétricos de listas passadas, e assumindo que a diferença de pressão entre os extremos de cada conexão satisfaz

   $$\Delta p \; = \; R^* \, Q$$

   onde R é uma resistência hidráulica fixa (com unidades, por exemplo, Pa-s/m^3), **escreva um código para calcular a pressão `P(1:n,1:n)` que recebe cada bloco**.

   Resposta: É como um circuito elétrico de $n \times n$ nós dos que já temos visto, onde a pressão ocupa o lugar da voltagem e a vazão o das correntes. Sabemos que nas esquinas há uma pressão (voltagem) imposta de valor P^*, devemos modificar essas quatro linhas. Para todos os outros nós, o desbalanço de vazões (correntes) deve valer $-Q^*$, que é o consumo. Resumindo, seria

```
n=10; m=10;
[xv yv nv nc conec R] = circuito(n,m,Rstar,Rstar);
A = matVtoI(nv,nc,conec,R);
b = -Qstar*ones(nv,1);
A(1,:)=0; A(1,1)=1; b(1,1)=Pstar;
A(n,:)=0; A(n,n)=1; b(n,1)=Pstar;
A(nv-n+1,:)=0;A(nv-n+1,nv-n+1)=1; b(nv-n+1,1)=Pstar;
A(nv,:)=0;A(nv,nv)=1; b(nv,1)=Pstar;
P=A\b;
Paux=reshape(P,10,10);
contourf(Paux)
surf(Paux)
```

---

2. Modifique o código anterior para ver a pressão que haverá em cada bloco se no bloco `(7,4)` se instalar um shopping que consome $5\,Q^*$ em um bairro de 10×10 blocos.

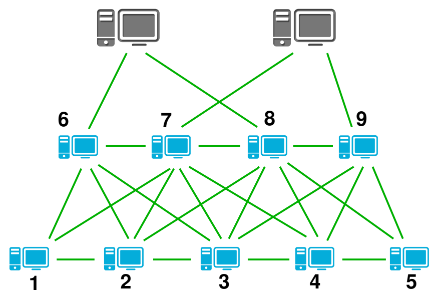
   Resposta: Apenas se deve modificar o lado direito da equação correspondente a o nó `(7,4)`, fazendo

```
k = (7-1)*10+4;
b(k,1)=-5*Qstar;
```

   e depois resolver normalmente.

---

3. **Caminhada aleatória:** Suponha que um agente realiza uma caminhada aleatória no quadrado $(0,1) \times (0,1)$, só parando quando toca a tampa superior ($x_2 = 1$). Escreva um programa que calcule, para cada posição inicial (x_1, x_2), la probabilidade de que o agente que começa ali acabe na metade direita da tampa superior, isto é, $x_1 \geq 0.5$.



4. Na figura acima se mostra uma pequena rede de computadores. Faça um programa em Matlab/Octave que calcule as probabilidades de que um virus introduzido nos computadores 1 a 5 chegue até os servidores (os grandones encima) sem antes ser detectado pelos antivirus localizados nos computadores 6 e 8. Suponha que o virus passa aleatoriamente de cada computador a qualquer um dos conectados com ele, com igual probabilidade.

   Resposta: Começamos por montar o grafo de conexões da rede, que podemos construir por exemplo com a "conectividade nó-nó". Essa conectividade é uma matriz que tem uma linha para cada nó, na qual estão armazenados os nós conectados com o correspondente á linha. Para o circuito da figura isto seria

```
conono=zeros(11,10);%maximo tamanho de linha e 10
conono(1,1:3)=[6 7 2];
conono(2,1:5)=[1 6 7 8 3];
conono(3,1:6)=[2 6 7 8 9 4];
conono(4,1:5)=[3 7 8 9 5];
conono(5,1:3)=[4 8 9];
conono(6,1:5)=[10 7 3 2 1];
conono(7,1:7)=[6 1 2 3 4 8 11];
conono(8,1:7)=[7 2 3 4 5 9 10];
conono(9,1:5)=[8 3 4 5 11];
conono(10,1:2)=[6 8];
conono(11,1:2)=[7 9];
```

   Com essa conectividade, montamos uma matriz que expressa a seguinte relação de probabilidades:

   $$P_i - \frac{1}{n_i} \sum_{j \leftrightarrow i} P_j = 0$$

   correspondendo a que a probabilidad de cada nó i é a média das probabilidades dos nós j conectados com i. Essa matriz, que chamaremos `A`, pode ser construida da seguinte maneira

```
function A = matrizprob(N,conono)
A=zeros(N,N);
for i=1:N
 for j=1:N-1
  if (conono(i,j)>0)
   A(i,i)=A(i,i)+1;
   A(i,j)=A(i,j)-1;
  end
 end
end
return
end
```

   A matriz resultante é exatamente a mesma que se as conexões fossem resistências unitárias de um circuito elétrico.

Para calcular o vetor de probabilidades que procuramos falta apenas fixar $P = 1$ nos servidores 10 e 11, e $P = 0$ nos detectores de virus 6 e 8. Isto fazemos substituindo as linhas correspondentes como, nos circuitos, quando a voltagem de um nó é conhecida.

O programa total poderia ser assim:

```
A = matrizprob(11,conono);
b = zeros(11,1);
A(10,:)=0; A(10,10)=1; b(10,1)=1;
A(11,:)=0; A(11,11)=1; b(11,1)=1;
A(6,:)=0; A(6,6)=1; b(6,1)=0;
A(8,:)=0; A(8,8)=1; b(8,1)=0;
%Agora calculamos P resolvendo AP=b
P=A\b;
%As probabilidades pedidas sao P(1:5)
P(1:5)
```

---

5. Implemente as funções

```
function [L U] = lufact(A)
function x = luresolve(L,U,b)
```

Resposta: Para a primeira poderia se aproveitar a função `lugauss` do livro, fazendo

```
Aaux = A; %para nao destruir A
A=lugauss(A);
L=eye(size(A,1))+tril(A,-1);
U=triu(A);
```

para a segunda ver página 132.

---

6. Considere a matriz do exercício 1, a usada para calcular a pressão. Verifique se ela é simétrica, se é diagonal dominante por linha e/ou por coluna.

---

7. Dado o sistema linear $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, calcular (na mão) a matriz de permutação $\underline{\underline{P}}$ tal que o sistema

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$$

seja idêntico ao original, com a única diferença de estarem as equações números α e β trocadas entre si. Verifique que $\underline{\underline{P}}$ é não singular.

Resposta: Veja que a matriz

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quando multiplicada por uma matriz $\underline{\underline{A}}$ de 2×2 resulta em

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

que justamente tem as linhas trocadas. Se verifica também que

$$\underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Convença-se de que a matriz $\underline{\underline{P}}$ que procuramos coincide com a matriz identidade em todos seus elementos com exeção dos elementos (α, α), (α, β), (β, α) e (β, β), que tomam os valores da matrizinha $\underline{\underline{T}}$, isto é

$$P_{\alpha\alpha} = 0, \qquad P_{\alpha\beta} = 1, \qquad P_{\beta\alpha} = 1, \qquad P_{\beta\beta} = 0$$

Pode por exemplo fazer em Matlab/Octave (escolhendo um `n`, um `ia` e um `ib`)

```
P=eye(n); P([ia ib],[ia ib])=[0 1;1 0];
A=rand(n,n);
B=P*A;
```

e verificar que `B` é igual a `A` com a linha `ia` trocada com a `ib`.

---

8. Verifique que as equações (5.35) e (5.37) do livro sejam equivalentes.

Resposta: Isto já melhor discutir na lousa.
